6 Punkte **Aufgabe 1.**
Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert ein Graph mit Valenzsequenz

$$(8,5,4,4,4,3,1,1,1,1,1).$$

Geben Sie im Falle der Existenz einen solchen Graphen an.

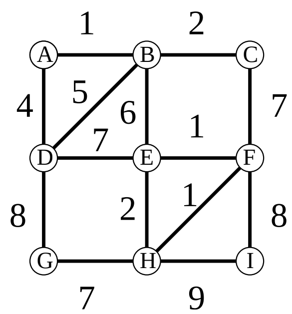
7 Punkte **Aufgabe 2.**
Ein Club hat 27 Mitglieder, die entweder männlich oder weiblich, entweder Erwachsene oder Jugendliche, bzw. entweder Vollmitglied oder Teilmitglied sind. Genau 14 Mitglieder sind männlich, genau 20 sind erwachsen und genau 14 sind Vollmitglied. Genau 10 sind männliche Erwachsene, genau 6 männliche Vollmitglieder gibt es und genau 13 erwachsene Vollmitglieder. Ferner sind genau 5 der männlichen Erwachsenen Vollmitglied. Wieviele weibliche Jugendliche im Club sind Teilmitglied?

5 Punkte **Aufgabe 3.**
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} i(3i+1) = n(n+1)^2$$

5 Punkte **Aufgabe 4.**
Schreiben Sie den Bruch $\frac{77}{6}$ von Dezimalzahlen um ins 5er-System.

Aufgabe 5.
Betrachten Sie folgenden (gewichteten) Graphen:



4 Punkte (a) Ist der Graph eulersch? Beweisen Sie Ihre Antwort.

4 Punkte (b) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum.

Aufgabe 6.

2 Punkte (a) Sei $n \geq 3$. Geben Sie einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten und $n-1$ Kanten an, bei dem alle Knoten bis auf einen den gleichen Knotengrad haben.

6 Punkte (b) Begründen Sie, ob Ihr Graph (bis auf Isomorphie) die eindeutige Lösung für (a) ist.

9 Punkte **Aufgabe 7.**
Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung sowie, falls möglich, die Cholesky-Faktorisierung der symmetrischen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 13 & -13 \\ 2 & -13 & 29 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, ob A positiv definit ist.

Aufgabe 8.

7 Punkte (a) Lösen Sie folgendes lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus (unter Verwendung von Bland's Rule) und geben Sie seine Optimallösung an:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 3x & + & 4y & + & 5z & & \\ \text{unter} & x & + & 3y & + & 2z & \leq & 5 \\ & 2x & + & y & + & 4z & \leq & 11 \\ & 2x & + & 4y & + & 3z & \leq & 8 \\ & & & & & x,y,z & \geq & 0 \end{array}$$

2 Punkte (b) Stellen Sie das dazu duale lineare Programm auf.

Hinweis zu (a): Bei Verwendung von Bland's Rule tauchen in der Rechnung ganze Zahlen und Brüche mit Nenner 2 auf.

5 Punkte **Aufgabe 9.**
Seien $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Betrachten Sie folgende Optimierungsprobleme:

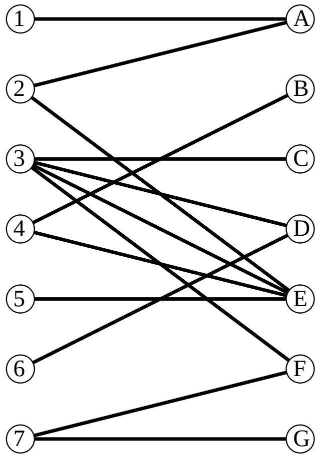
$$\text{(P)} \quad \begin{array}{lrcl} \min & c^\top x & & \\ \text{unter} & Ax & = & b \\ & x & \leq & 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{lrcl} \max & y^\top b & & \\ \text{unter} & y^\top A & \leq & c^\top \end{array}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ zulässig für (P) und $y \in \mathbb{R}^m$ zulässig für (D). Zeigen Sie elementar, unter Begründung jedes Zwischenschrittes, ohne Benutzung des Dualitätssatzes, dass gilt:

$$c^\top x \leq y^\top b.$$

Aufgabe 10.

7 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der unten abgebildete bipartite Graph hat ein perfektes Matching.



3 Punkte (b) Fügen Sie eine Kante zum Graphen hinzu, so dass der entstehende Graph (dann?/immer noch?) ein perfektes Matching hat und geben Sie ein solches Matching an.

10 Punkte **Aufgabe 11.**
Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lcccccc} \min & (x-3)^2 & + & (y+4)^2 & & \\ \text{unter} & x^2 & + & y^2 & = & 100. \end{array}$$

Aufgabe 12.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

6 Punkte (a) Beschreiben Sie das Verfahren der Goldenen-Schnitt-Suche zur Suche eines globalen Minimums von f.

2 Punkte (b) Geben Sie eine mögliche hinreichende Bedingung an die Funktion f an, die garantiert, dass die Goldener-Schnitt-Suche tatsächlich gegen ein globales Minimum konvergiert.