Aufgabe 1.
Wir definieren die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv vermöge $a_0 := 0$, $a_n := 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ für $n \geq 1$.
Zeigen Sie: $a_n = n2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Lösung:

Induktionsanfang: $a_0 = 0 \cdot 2^{-1} = 0$ stimmt offenbar.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a_{n-1} = (n-1)2^{(n-1)-1}$.

Induktionsschritt: Dann haben wir

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 2^{n-1} \\ &\overset{IV}{=} 2(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} \\ &= (n-1)2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &= n2^{n-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.
In einem Lokal sind noch 5 Stühle frei.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Stühle zu besetzen, wenn
   i) 3
   ii) 5
   iii) 8

   Gäste gleichzeitig ankommen?

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Platzvergabe kein Gast auf dem Platz direkt neben der Toilette sitzen muss?

Lösung:
Hier gab es zwei verschiedene mögliche Lösungsansätze, je nachdem ob man davon ausgeht, dass die Stühle verschieden (z. B. nummeriert) sind oder nicht.

Stühle nummeriert:

a) i) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
   ii) $5! = 120$
   iii) $5!\binom{8}{5} = 120 \cdot \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 120 \cdot 56 = 6720$

b) Bei ii) und iii) werden jeweils alle Plätze besetzt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner auf dem Platz neben der Toilette sitzt gleich Null. Bei i) gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten, die 3 Gäste auf die 4 Plätze zu setzen, die nicht neben der Toilette sind. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner neben der Toilette sitzen muss $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Stühle nicht nummeriert:

a) i) 1
   ii) 1
   iii) $\binom{8}{5} = 56$

b) Hier ergibt sich das Gleiche wie bei b) oben.

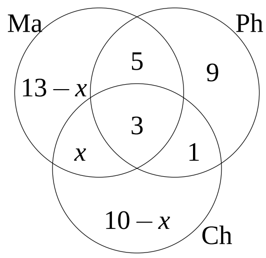
Aufgabe 3.
An einer Schule lehren 39 Lehrer, die jeder mindestens eins der Fächer Mathematik, Chemie und Physik unterrichten. 21 Lehrer unterrichten Mathematik, 14 unterrichten Chemie und 18 unterrichten Physik. 8 Lehrer unterrichten gleichzeitig Mathe und Physik, 4 unterrichten Physik und Chemie und 3 Lehrer unterrichten alle drei Fächer. Wie viele Lehrer unterrichten

a) nicht Physik,
b) genau Mathematik und Chemie,
c) genau eins der Fächer?

Lösung

a) Die Zahl der Lehrer, die nicht Physik unterrichten ist die Gesamtzahl der Lehrer abzüglich derer, die Physik unterrichten, also $39 - 18 = 21$.

b) Zunächst zeichnen wir das Venn-Diagramm, wobei wir berücksichtigen, dass die Anzahl der Lehrer, die Mathe und Chemie unterrichten unbekannt ist. Im Diagramm ist dies der Wert $x+3$.



Wir benutzen die Siebformel und nutzen aus, dass es keine Lehrer gibt, die keines der Fächer unterrichten. Die Grundmenge aller Lehrer bezeichnen wir mit G, die Lehrer, die Mathe, Physik bzw. Chemie unterrichten mit M, P bzw. C.

$$\begin{aligned}
0 &= |G \setminus (M \cup P \cup C)| \\
&= |G| - |M| - |P| - |C| + |M \cap P| + |M \cap C| + |P \cap C| - |M \cap P \cap C| \\
&= 39 - 21 - 18 - 14 + 8 + (x+3) + 4 - 3 \\
&= -2 + x.
\end{aligned}$$

Also ist $x = 2$ die Anzahl der Lehrer, die genau Mathe und Chemie unterrichten.

c) Wir setzen x in das Venn-Diagramm ein und erhalten für die Anzahl der Lehrer, die genau ein Fach unterrichten $13 - x + 9 + 10 - x = 28$.

Aufgabe 4.
Sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation mit folgenden Eigenschaften:

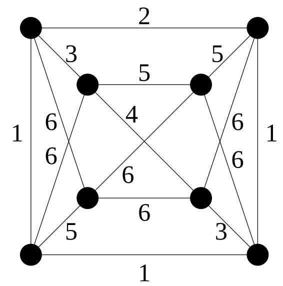
- R ist symmetrisch und transitiv.
- Für alle $m \in M$ gibt es ein $n \in M$ mit $(m,n) \in R$.

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.
Lösung:
Wegen der ersten Eigenschaft ist nur zu zeigen, dass R reflexiv ist. Sei $m \in M$ beliebig. Dann existiert wegen der zweiten Eigenschaft ein $n \in M$ mit $(m,n) \in R$. Nun folgt mit der ersten Eigenschaft:

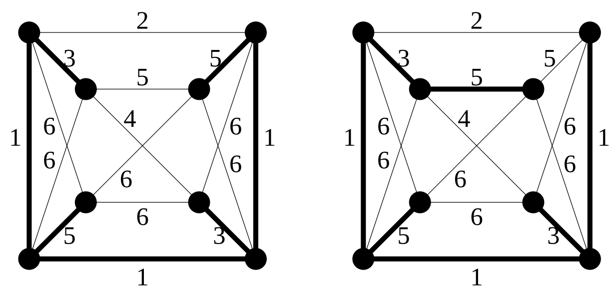
$$(m,n) \in R \overset{\text{Symmetrie}}{\Longrightarrow} (n,m) \in R \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} (m,m) \in R,$$

also insgesamt die Reflexivität.

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie für den folgenden Graphen einen minimalen aufspannenden Baum und dessen Gewicht. Ist dieser eindeutig?



Lösung:
Wir wählen nacheinander Kanten mit jeweils kleinsten Gewicht aus, die im bereits ausgewählten Wald keinen Kreis schließen. An einer Stelle (im letzten oder vorletzten Schritt) hat man zwischen zwei Kanten mit Gewicht 5 die Wahl, welche man nimmt. Dies führt auf die beiden Bäume



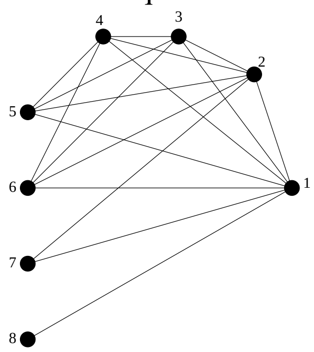
mit Gewicht 19. Die Lösung ist also nicht eindeutig.

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie einen Graphen mit Valenzsequenz $(7,6,5,5,4,4,2,1)$ oder beweisen Sie, dass es einen solchen Graphen nicht geben kann.

Lösung:
Wir benutzen das Verfahren von Havel-Hakimi:

$$\begin{aligned} & (7,6,5,5,4,4,2,1) \text{ ist Valenzsequenz} \\ \Longleftrightarrow\ & (5,4,4,3,3,1,0) \text{ ist Valenzsequenz} \\ \Longleftrightarrow\ & (3,3,2,2,0,0) \text{ ist Valenzsequenz} \\ \Longleftrightarrow\ & (2,1,1,0,0) \text{ ist Valenzsequenz} \\ \Longleftrightarrow\ & (0,0,0,0) \text{ ist Valenzsequenz.} \end{aligned}$$

Letzteres ist offensichtlich der Fall und wir rekonstruieren aus der untersten Valenzsequenz einen Graphen mit der gewünschten Valenzsequenz.



Aufgabe 7.

a) Definieren Sie zu einem gegebenen Wurzelbaum eine kanonische Pflanzung.
b) Definieren Sie, wie man in einem Baum bis auf Isomorphie eindeutig eine Wurzel festlegen kann.
c) Ist $(((()())())(())())$ der Code eines
   i) gepflanzten Baums,
   ii) eines Wurzelbaums bzw.
   iii) eines Baums?

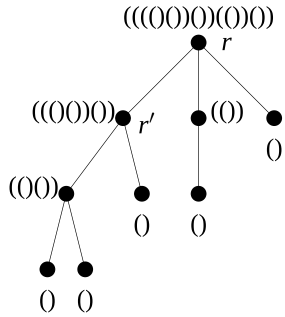
   Begründen Sie bitte jeweils Ihre Entscheidung.

Lösung:

a) Die Pflanzung wird rekursiv so definiert, dass die Teilbäume, die durch die direkten Nachfolger eines Knotens definiert sind, nach ihrem Code lexikographisch aufsteigend von links nach rechts sortiert sind.

b) Die Exzentrizität eines Knotens v ist $\max_{w\in V} \operatorname{dist}(v,w)$. Das Zentrum sind die Knoten minimaler Exzentrizität. Bei Bäumen ist das Zentrum entweder ein einzelner Knoten oder zwei adjazente Knoten. Im ersten Fall nehmen wir den Zentrumsknoten als Wurzel. Im zweiten Fall nehmen wir den Knoten, auf dessen Seite der Baum mit dem lexikographisch kleineren Code steht.

c) i) Es handelt sich um den Code eines gepflanzten Baums, denn der Ausdruck ist wohlgeklammert. Der gepflanzte Baum sieht wie folgt aus:



ii) Die Unterbaumcodes an jedem Knoten sind lexikographisch aufsteigend sortiert, also handelt es sich um den Code eines Wurzelbaums (siehe a)).

iii) Die Knoten minimaler Exzentrizität 3 sind r' und r. Deren Untercodes sind $((()())()) \prec ((())())$. Also ist der Code an r' kleiner und wir müssten zum Codieren r' als Wurzel wählen und nicht r wie in der obigen Pflanzung (siehe b)). Es handelt sich also hier nicht um den Code eines Baums.

Aufgabe 8.
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & -6. \end{array}$$

Lösung:
Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und benutzen den Gauß-Algorithmus, um die Matrix in Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -14 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & -\frac{22}{3} \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert $z = -1$, $y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$, $x = 4 - 2 - 1 = 1$. Also ist $(x, y, z) = (1, 2, -1)$ eindeutige Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 9.
Es seien

a) $A_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ und
b) $A_2 := \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

Sind diese Matrizen positiv definit? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Cholesky-Faktorisierung.

Lösung:

a) A_1 ist nicht regulär und es gilt z. B. $(-2, 1) A_1 \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = (-2, 1) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Also ist A_1 nicht positiv definit.

b) Wir suchen eine Matrix L mit $A_2 = LL^\top$. Dazu setzen wir wie im Kurs $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2}$, $l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ und $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Also ist $L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ eine reguläre untere Dreiecksmatrix mit $A_2 = LL^\top$ und somit die Matrix positiv definit.

Aufgabe 10.

Bestimmen Sie die Binärdarstellung der Zahl $2.2_{(6)}$ (Darstellung bzgl. der Basis 6)

Lösung: $2.2_{(6)} = 2 \cdot 6^0 + 2 \cdot 6^{-1} = 2.\overline{3}_{(10)}$. Nun bestimmen wir aus dieser Dezimalzahl die Binärdarstellung: $2_{(10)} = 10_{(2)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \div \frac{1}{2} &= \mathbf{0} \text{ Rest } \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{12} \div \frac{3}{12} &= \mathbf{1} \text{ Rest } \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \div \frac{1}{8} &= \mathbf{0} \text{ Rest } \frac{1}{12} \left(= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Hier kommt es zur periodischen Wiederholung und daher ist $2.2_{(6)} = 10.\overline{01}_{(2)}$.

Aufgabe 11.

Bestimmen Sie die Extremalpunkte der Funktion $f(x,y,z) = x + 2y - 2z$ über der Menge $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Um welche Art Extremum handelt es sich jeweils?

Lösung:

Wir bestimmen die Gradienten und Hesse-Matrizen von $f(x,y,z) = x + 2y - 2z$ und $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (1,2,-2) & \nabla g(x,y,z) &= (2x,2y,2z) \\ \nabla^2 f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} & \nabla^2 g(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir stellen die Kuhn-Tucker-Bedingung auf:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

also

$$(1,2,-2) = \lambda(2x,2y,2z).$$

Für $\lambda = 0$ steht hier ein Widerspruch, also können wir folgern $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$, $z = -\frac{1}{\lambda}$. Setzen wir dies in die Nebenbedingung $h(x,y,z) = 0$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} &= 1 \\ \iff \frac{9}{4\lambda^2} &= 1 \\ \iff \lambda_{1/2} &= \pm\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies die zwei Kandidaten für ein Extremum

$$(x_1, y_1, z_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \text{ und } (x_2, y_2, z_2) = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Um die jeweilige Art des Extremums zu untersuchen untersuchen wir die Matrizen

$$L_1 = \nabla^2 f(x_1, y_1, z_1) - \lambda_1 \nabla^2 g(x_1, y_1, z_1) \text{ und } L_2 = \nabla^2 f(x_2, y_2, z_2) - \lambda_2 \nabla^2 g(x_2, y_2, z_2)$$

auf positive bzw. negative Definitheit. Wir haben $L_1 = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $L_2 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Also sind $-L_1$ und L_2 positiv definit und damit L_1 negativ definit, woraus folgt, dass im Punkt (x_1, y_1, z_1) ein lokales Maximum liegt und in (x_2, y_2, z_2) ein lokales Minimum. Da der zulässige Bereich abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt die Funktion dort ihr Minimum und Maximum an, also handelt es sich hier um das jeweils globale Maximum/Minimum.

Aufgabe 12.
Bringen Sie folgendes Lineare Optimierungsproblem in die Standardform $\max c^\top x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ und bestimmen Sie eine Lösung:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\ & -x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lösung:
Zunächst bringen wir das Problem durch Einführen zweier vorzeichenbeschränkter Schlupfvariablen in Standardform:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & & & & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & s_1 & & & = & 24 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & - & s_2 & = & 3 \\ & & & & & & x_1, x_2, & s_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Durch die Schlupfvariable mit negativem Vorzeichen haben wir noch keine zulässige Basis und lösen deshalb zunächst das Hilfsproblem

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr} \max & -z & & & & & & & & & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & s_1 & & & & & = & 24 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & - & s_2 & + & z & = & 3 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, s_1, & s_2, z & \geq & 0 \end{array}$$

In Tableauform sieht das dann nach einem Pivotschritt in der Spalte der künstlichen Schlupfvariable z wie folgt aus:

$$\begin{array}{|rrrr|r|r|} \hline -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|rrrr|r|r|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \hline \boxed{5} & 0 & 1 & 3 & -3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Nun können wir die künstliche Schlupfvariable und die Hilfszielfunktionszeile streichen und auf der 5 pivotieren, woraus wir das finale Tableau

$$\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -12 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 3 \\
0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 6 \\
\hline
\end{array}$$

erhalten, aus dem wir die Lösung $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ mit Zielfunktionswert 12 ablesen können.