5 Punkte **Aufgabe 1.**

Wir definieren die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv vermöge $a_0 := 0,\ a_n := 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie: $a_n = n2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

6 Punkte **Aufgabe 2.**

In einem Lokal sind noch 5 Stühle frei.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Stühle zu besetzen, wenn
   i) 3
   ii) 5
   iii) 8

   Gäste gleichzeitig ankommen?

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Platzvergabe kein Gast auf dem Platz direkt neben der Toillette sitzen muss?

6 Punkte **Aufgabe 3.**

An einer Schule lehren 39 Lehrer, die jeder mindestens eins der Fächer Mathematik, Chemie und Physik unterrichten. 21 Lehrer unterrichten Mathematik, 14 unterrichten Chemie und 18 unterrichten Physik. 8 Lehrer unterrichten gleichzeitig Mathe und Physik, 4 unterrichten Physik und Chemie und 3 Lehrer unterrichten alle drei Fächer. Wie viele Lehrer unterrichten

a) nicht Physik,
b) genau Mathematik und Chemie,
c) genau eins der Fächer?

6 Punkte **Aufgabe 4.**

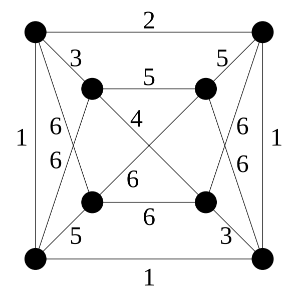
Sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation mit folgenden Eigenschaften:

- R ist symmetrisch und transitiv.
- Für alle $m \in M$ gibt es ein $n \in M$ mit $(m,n) \in R$.

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

5 Punkte **Aufgabe 5.**

Bestimmen Sie für den folgenden Graphen einen minimalen aufspannenden Baum und dessen Gewicht. Ist dieser eindeutig?



8 Punkte **Aufgabe 6.**

Bestimmen Sie einen Graphen mit Valenzsequenz $(7,6,5,5,4,4,2,1)$ oder beweisen Sie, dass es einen solchen Graphen nicht geben kann.

12 Punkte **Aufgabe 7.**

a) Definieren Sie zu einem gegebenen Wurzelbaum eine kanonische Pflanzung.
b) Definieren Sie, wie man in einem Baum bis auf Isomorphie eindeutig eine Wurzel festlegen kann.
c) Ist $((((()())())(())()))$ der Code eines
   i) gepflanzten Baums,
   ii) eines Wurzelbaums bzw.
   iii) eines Baums?

   Begründen Sie bitte jeweils Ihre Entscheidung.

8 Punkte **Aufgabe 8.**

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & -6. \end{array}$$

8 Punkte **Aufgabe 9.**

Es seien

a) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und
b) $A_2 := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Sind diese Matrizen positiv definit? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Cholesky-Faktorisierung.

6 Punkte **Aufgabe 10.**

Bestimmen Sie die Binärdarstellung der Zahl $2.2_{(6)}$ (Darstellung bzgl. der Basis 6)

10 Punkte **Aufgabe 11.**

Bestimmen Sie die Extremalpunkte der Funktion $f(x,y,z) = x + 2y - 2z$ über der Menge $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Um welche Art Extremum handelt es sich jeweils?

10 Punkte **Aufgabe 12.**

Bringen Sie folgendes Lineare Optimierungsproblem in die Standardform $\max c^\top x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ und bestimmen Sie eine Lösung:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\ & -x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$