Aufgabe 1.

5 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$3\sum_{k=1}^{n}(k^2-k) = (n+1)n(n-1)$$

Aufgabe 2.

Es sei $f\colon \{1,\ldots 9\} \to \{1,\ldots,9\}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 2 \text{ und } x \text{ gerade} \\ 10-x & \text{sonst} \end{cases}$$

6 Punkte (a) Zeigen Sie, dass f eine Permutation ist.

3 Punkte (b) Bestimmen Sie eine Zykelzerlegung von f.

Aufgabe 3.

Es sei $f\colon A \to B$ eine beliebige Abbildung.

4 Punkte (a) Zeigen Sie: die durch

$$(x,y) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

definierte Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: ist $(B,\leq)$ eine Partialordnung, dann ist die durch

$$(x,y) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

definierte Relation $R \subseteq A \times A$ eine Partialordnung auf A.

Aufgabe 4.

4 Punkte (a) Entscheiden Sie für die folgenden Sequenzen, ob es sich um Valenzsequenzen eines einfachen Graphen handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(4,4,3,2,1,0)$

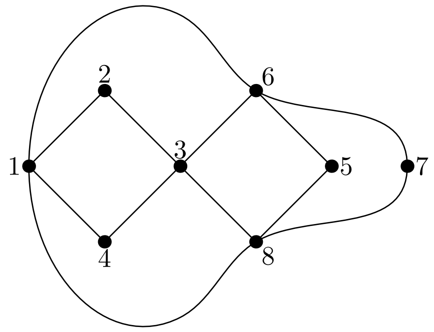
(ii) $(4,4,3,3,3,1)$

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Sind $(d_1,\ldots,d_n)$ und $(d'_1,\ldots,d'_n)$ Valenzsequenzen und ist $d_1 + d'_1 < n$, dann ist auch $(d_1 + d'_1,\ldots,d_n + d'_n)$ eine Valenzsequenz.

Hinweis: Was ist $d_1 + d'_1 < n$ wert, wenn $d_n = d'_n = 0$?

Aufgabe 5.
Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen:



1 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: der Graph ist bipartit.

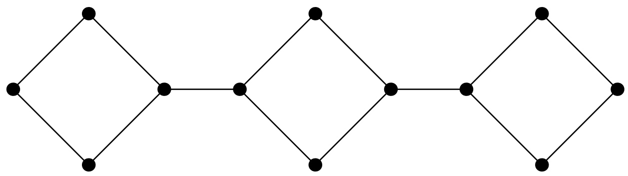
2 Punkte (b) Finden Sie eine Eulertour des Graphen.

4 Punkte (c) Geben Sie eine Ohrenzerlegung des Graphen an.

um eine Ohrenzerlegung zu erhalten.

Aufgabe 6.

5 Punkte Bestimmen Sie die Anzahl der perfekten Matchings für den folgenden Graphen:



Aufgabe 7.

8 Punkte Es sei $\frac{a}{b}$ ein Bruch in gekürzter Form. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) Die 16-adische Darstellung von $\frac{a}{b}$ hat nur endlich viele von 0 verschiedene Nachkommastellen.

(ii) b ist eine Zweierpotenz.

Aufgabe 8.
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 10 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

3 Punkte (b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 9.

Es sei A eine reelle $m \times n$-Matrix.

2 Punkte (a) Zeigen Sie: $A^T A$ ist symmetrisch und positiv semidefinit.

4 Punkte (b) Zeigen Sie: $A^T A$ positiv definit $\Longleftrightarrow \ker A = \{0\}$.

3 Punkte (c) Geben Sie ein Beispiel einer Matrix A an, für welche die LU-Zerlegung und die Cholesky-Zerlegung von $A^T A$ nicht übereinstimmen.

Aufgabe 10.

6 Punkte (a) Zu einer reellen symmetrischen $n \times n$-Matrix A, einem $b \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ sei die Abbildung $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$q(x) = x^T A x + b^T x + r$$

definiert. Zeigen Sie

(i) q ist konvex $\Longleftrightarrow$ A ist positiv semidefinit.

(ii) q ist strikt konvex $\Longleftrightarrow$ A ist positiv definit.

4 Punkte (b) Bestimmen Sie, ob die durch $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + x - 4y - z + 5$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Aufgabe 11.

7 Punkte Bestimmen Sie die Extrempunkte der durch $f(x,y) = 3x + 4y$ definierten Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf der Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 12.

Sie betreiben eine Anlage, welche ein kohlensäurehaltiges Getränk in Dosen abfüllen kann, die entweder 330 ml oder 500 ml fassen. Diese Dosen verkaufen Sie in Gebinden zu je 10 Paletten á 32 Dosen. Die Abfüllanlage kann jede Woche für maximal 70 Stunden betrieben werden. In einer Stunde kann die Anlage jeweils ein Gebinde von 320 Dosen abfüllen, unabhängig vom Fassungsvermögen der befüllten Dosen. Jede Woche stehen Ihnen maximal 10000 Liter des kohlensäurehaltigen Getränks zur Abfüllung zur Verfügung. Die Verkaufsabteilung ist ausserdem in der Lage, maximal 60 Gebinde der 330 ml Dosen und 40 Gebinde der 500 ml Dosen je Woche zu verkaufen. Ihr Gewinn pro 330 ml-Gebinde beträgt 45 Euro, pro 500 ml-Gebinde 35 Euro.

6 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem, den Wochengewinn zu maximieren, als lineares Optimierungsproblem.

3 Punkte (b) Wie sieht der optimale Produktionsplan aus? Welcher Gewinn kann maximal erwirtschaftet werden? Begründen Sie!

(a) Wir bezeichnen die Anzahl der Stunden, in denen die Maschine 330 ml Dosen befüllt mit x und die Anzahl der Stunden, in denen die Maschine 500 ml Dosen befüllt mit y. Der Gewinn soll maximiert werden, also ist das Optimierungsziel

$$\max \quad 45x + 35y.$$

Weiterhin sind die folgenden Nebenbedingungen einzuhalten: Die Produktionsdauer ist naturgemäß immer nichtnegativ, also muss

$$x, y \geq 0$$

gelten. Die Maschine kann maximal 70 Stunden betrieben werden, also ist weiterhin

$$x + y \leq 70.$$

Ein 330 ml-Gebinde benötigt $0,33 \cdot 320 = 105,6$ Liter des Getränks, während ein 500 ml-Gebinde $0,5 \cdot 320 = 160$ Liter benötigt. Die Kapazitätsbeschränkung des Abfüllerzeugnisses wird also durch

$$105,6 \cdot x + 160 \cdot y \leq 10000$$

beschrieben. Als letztes muss auch noch die Absatzbeschränkung am Markt modelliert werden: Es gelte

$$x \leq 60 \quad \text{und} \quad y \leq 40.$$

(b) Da ein 330 ml-Gebinde weniger Getränkeresourcen verbraucht aber bei gleicher Maschinenlaufzeit mehr Gewinn bringt, ist es klar, dass das Getränk am besten in möglichst viele 330 ml Dosen gefüllt werden muss. Wir können höchstens 60 dieser Gebinde absetzen, und für diese müssen wir $105,6 \cdot 60 = 6336$ Liter Getränk verwenden. Es bleiben also noch 3664 Liter übrig, mit denen 500 ml Dosen befüllt werden können. Dies entspricht $22,9$ Gebinden, von denen allerdings nur noch 10 produziert werden können, da sonst die maximale Maschinenlaufzeit überschritten wird. Die Optimallösung ist also $x = 60$ und $y = 10$ mit einem Gewinn von $45 \cdot 60 + 35 \cdot 10 = 3050$ Euro.