Aufgabe 1.

5 Punkte Die Folge $(F_n)_{n\geq 0}$ der Fibonaccizahlen ist definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, \\ F_1 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Aufgabe 2.

5 Punkte An der Universität Musterstadt können nach dem ersten Semester Prüfungen in den drei Fächern A, B und C abgelegt werden. 90% der Studierenden legen eine Prüfung in mindestens einem der Fächer A, B oder C ab. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfung im Fach A ablegt, beträgt 50%, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfung im Fach B ablegt, 70%, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfungen

- sowohl in Fach A als auch in Fach B ablegt, 30%;
- sowohl in Fach A als auch in Fach C ablegt, 25%; bzw.
- sowohl in Fach B als auch in Fach C ablegt, 40%.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand die Prüfungen in allen drei Fächern ablegt, beträgt 15%.
Zeigen oder widerlegen Sie die Richtigkeit folgender Aussage:

> „Wenn jemand die Prüfung in Fach C ablegt, dann legt er auch die Prüfung in Fach A oder Fach B (oder beiden) ab.“

Aufgabe 3.

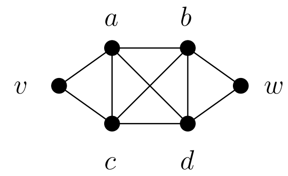
5 Punkte Betrachten Sie folgende Relation R auf der Grundmenge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, wobei $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$(x,y) \in R \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{Z} : \ x - y = z.$$

Beweisen Sie: Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den im folgenden abgebildeten Graphen $G = (V, E)$:



2 Punkte (a) Zeigen Sie: G ist 2-zusammenhängend.

Geben Sie eine Ohrenzerlegung von G an.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist eulersch.

Geben Sie eine Eulertour an, falls eine solche existiert.

3 Punkte (c) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4 von v nach w.

1 Punkt (d) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist ein Baum.

1 Punkt (e) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist bipartit.

2 Punkte (f) Das *Komplement* von G ist der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit

$$\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E.$$

D.h. anschaulich ist $\overline{G}$ der Graph der Nichtkanten von G.

Zeigen oder widerlegen Sie: $\overline{G}$ ist ein Baum.

2 Punkte (g) Zeigen oder widerlegen Sie: $\overline{G}$ ist *selbstkomplementär* (d.h. $\overline{G}$ ist isomorph zu G).

4 Punkte (h) Betrachten Sie nun wieder den Originalgraphen G zusammen mit der Kantengewichtsfunktion c, welcher jeder Kante $\{x, y\}$ das Gewicht

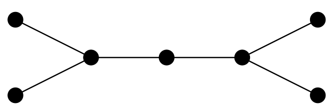
$$c(\{x, y\}) = \min\{\deg_G(x), \deg_G(y)\}$$

zuordnet.

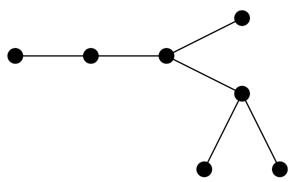
Zeigen Sie: Jeder minimale aufspannende Baum von G bezüglich der Kantengewichtsfunktion c ist isomorph zum Weg P_6 auf 6 Knoten.

Aufgabe 5.

5 Punkte Betrachten Sie die unten abgebildeten Graphen T_1 und T_2.



T_1

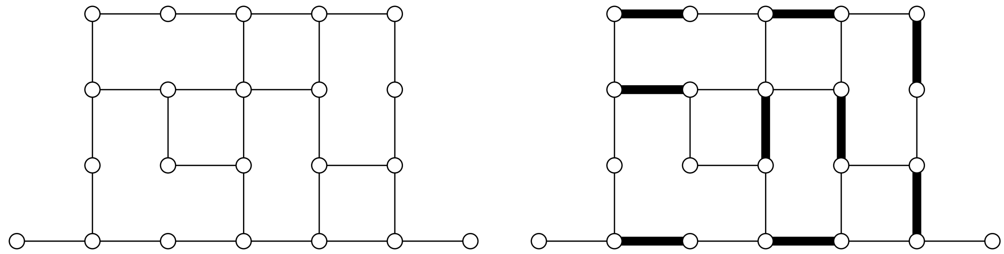


T_2

Zeigen oder widerlegen Sie: T_1 und T_2 sind isomorph.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen H und das eingezeichnete Matching M (fette Kanten).



H $\qquad$ H mit Matching M

3 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Das eingezeichnete Matching M ist maximal.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph H hat ein perfektes Matching.

Aufgabe 7.

5 Punkte Sei $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $\frac{1}{2} < x < 1$, die in 4-adischer Darstellung $x = 0.x_{-1}x_{-2}x_{-3}\dots_{(4)}$ nur endlich viele von Null verschiedene Nachkommastellen x_{-i} hat. Sei K der kleinste Index, so dass für alle $i > K$ gilt: $x_{-i} = 0$.

Zeigen Sie: Die Binärdarstellung (2-adische Darstellung) von $x = 0.y_{-1}y_{-2}y_{-3}\dots_{(2)}$ hat dann auch nur endlich viele von Null verschiedene Nachkommastellen und für den kleinsten Index L, so dass $y_{-i} = 0$ für alle $i > L$ gilt, gilt:

$$L = 2K \quad \text{oder} \quad L = 2K - 1.$$

Aufgabe 8.

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

1 Punkt (a) Berechnen Sie $\|A\|_\infty$.

4 Punkte (b) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

2 Punkte (c) Bestimmen Sie, sofern möglich, eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ oder beweisen Sie dessen Nichtlösbarkeit.

Aufgabe 9.

8 Punkte Bestimmen Sie sämtliche lokalen Minima der Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

auf der Mannigfaltigkeit

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}.$$

Aufgabe 10.

5 Punkte Bestimmen Sie die Konvergenzrate der Folge $\left(2^{-2^n+1000}\right)_{n\geq 0}$.

Aufgabe 11.

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + z - x.$$

1 Punkt (a) Sei $(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Hessematrix $\nabla^2 f(x,y,z)$ von f an der Stelle $(x,y,z)^\top$.

3 Punkte (b) Zeigen Sie: f ist strikt konvex.

5 Punkte (c) Führen Sie einen Schritt des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines lokalen Minimums der Funktion f durch, der Startpunkt sei $(x_0, y_0, z_0)^\top = (1,1,1)^\top$.

2 Punkte (d) Liegt an der Stelle des gefundenen ersten Iterationspunkts nach Durchführung des Schrittes des Newtonverfahrens ein striktes globales Minimum der Funktion f?

Aufgabe 12.

In einer Chemiefabrik wird ein Produkt P aus den Rohstoffen X, Y und Z hergestellt. Dazu stehen zwei verschiedene Anlagen A und B zur Verfügung. Unten aufgelistet ist, wieviel von den Rohstoffen (in Tonnen), die Anlagen jeweils zur Herstellung von 1 Tonne des Produkts benötigen, sowie die maximal täglich nutzbare Menge an den Rohstoffen (in Tonnen):

Rohstoff	Anlage A	Anlage B	maximal nutzbare Menge
X	2	1	8
Y	2	3	12
Z	1	1	6

Die Betriebskosten von Anlage A zur Herstellung von einer Tonne von P betragen 15000€, die von Anlage B nur 10000€. Der Verkaufserlös von einer Tonne von P beträgt 30000€ (Sie dürfen davon ausgehen, dass die komplette Produktion Absatz findet.)

4 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem, einen täglichen Produktionsplan zu erstellen, der den Gewinn maximiert, als lineares Programm.

6 Punkte (b) Lösen Sie dieses mit einer Methode Ihrer Wahl.