Aufgabe 1.

6 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (k!)^2 \leq ((n+1)!)^2 - n.$$

Aufgabe 2.

6 Punkte Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die Anzahl $|M|$ der Elemente der Menge

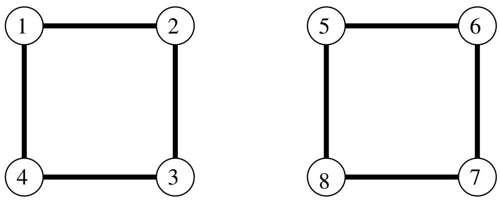
$$M := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq n\}$$

gilt:

$$|M| = \binom{n+k}{k}.$$

Aufgabe 3.

Betrachten Sie den unten abgebildeten Graphen $G = (V, E)$ mit 8 Knoten.



G

1 Punkt (a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie: G ist eulersch.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist 2-zusammenhängend.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist bipartit.

3 Punkte (d) Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 8 von Knoten 1 nach Knoten 2. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

2 Punkte (e) Nun sei auf $G + \{3, 8\}$ die Kantengewichtsfunktion $w : E \cup \{\{3, 8\}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$w(\{i, j\}) := |i - j|$$

für alle Kanten $\{i, j\} \in E \cup \{\{3, 8\}\}$.

Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum von $G + \{3, 8\}$ bezüglich der Gewichtsfunktion w. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 4.

6 Punkte (a) Zeigen Sie: $(3,3,3,3,3,3)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

Geben Sie einen Graphen mit dieser Valenzsequenz an.

7 Punkte (b) Sei

$$S_n := (3,3,\ldots,3) \in \mathbb{N}^n$$

die Sequenz mit n Einträgen, bei der jeder Eintrag gleich 3 ist.

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist S_n Valenzsequenz eines Graphen? Beweisen Sie Ihre Aussage.

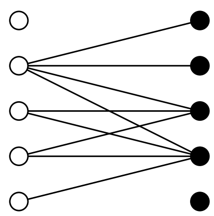
Hinweis zu (b): Verwenden Sie geeignete Graphen der Ordnung 4 und 6 als „Bausteine“.
Alternativer Hinweis zu (b): Geben Sie einen geeigneten bipartiten Graphen an.

Aufgabe 5.

6 Punkte Geben Sie zwei nichtisomorphe Bäume mit jeweils genau 5 Knoten an und beweisen Sie deren Nichtisomorphie.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie folgenden bipartiten Graphen G_0.



G_0

2 Punkte (a) Bestimmen Sie ein maximales Matching in G_0.

4 Punkte (b) Beweisen Sie die Maximalität des in (a) gefundenen Matchings.

Aufgabe 7.

5 Punkte Geben Sie die 2-adische Darstellung der Zahl $\frac{4}{9}$ an.
Hinweis: Alle in der Aufgabenstellung vorkommenden Zahlen sind wie üblich im Zehnersystem notiert.

Aufgabe 8.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 10 & -1 & 27 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & 27 & -5 & 78 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

1 Punkt (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Bei der LU-Zerlegung aus (a) handelt es sich um die Cholesky-Faktorisierung von A.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: 0 ist Eigenwert von A.

1 Punkt (d) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

8 Punkte **Aufgabe 9.**
Lösen Sie das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & (x-3)^2 & + & (y-3)^2 & & \\ \text{unter} & x^2 & - & y & \leq & 1 \\ & 3x & + & y & = & 9. \end{array}$$

Aufgabe 10.
Sei $f : [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := 2|x-1| - |x-2|$$

für alle $x \in [-10, 10]$.

4 Punkte (a) Bestimmen Sie sämtliche lokalen Minima und Maxima von f und begründen Sie, dass die Funktion f strikt unimodal ist.

4 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion f ist konvex.

Hinweis: Das Betrachten des Funktionsgraphen hilft bei der Ideenfindung.

Aufgabe 11.
Sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y) := 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 1.$$

6 Punkte (a) Führen Sie einen Schritt des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines lokalen Minimums von F durch, startend von $(0,0)^\top$.

2 Punkte (b) Ist nach einem Schritt des Verfahrens bereits ein lokales Minimum von F erreicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

9 Punkte **Aufgabe 12.**

Finden Sie reelle nichtnegative Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ mit

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Hinweis: Bei Benutzung von Bland's Rule tauchen in unseren Rechnungen im Simplextableau keine Nenner größer als 3 auf.