Aufgabe 1.

6 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $k,n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(k+1) \text{ teilt } ((k+2)^n - 1).$$

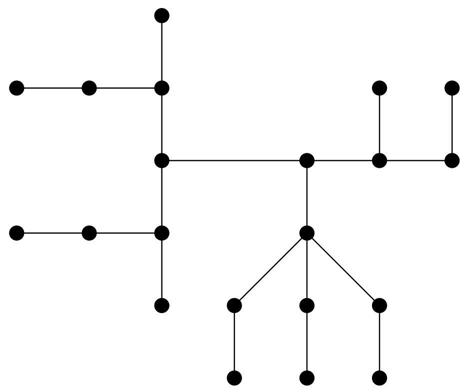
Hinweis: Betrachten Sie k als fixen Parameter.

Aufgabe 2.

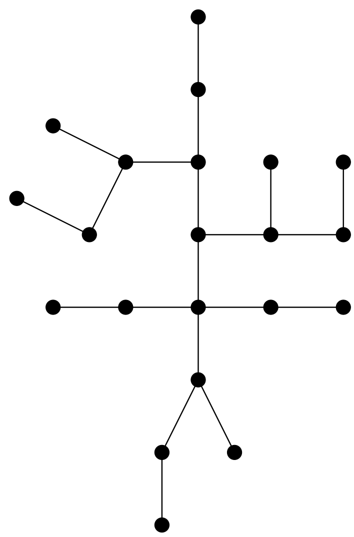
5 Punkte Ein Spielmacher bietet Ihnen folgendes Spiel an: Sie würfeln mit zwei fairen Würfeln (auf deren Seiten jeweils die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 stehen). Wenn die Augensumme kleiner oder gleich 4 ist, zahlt Ihnen der Spielmacher 50 Euro, ansonsten müssen Sie dem Spielmacher 10 Euro zahlen. Ist das Spiel fair? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Was ist Ihr erwarteter Gewinn bei dem Spiel?

Aufgabe 3.

5 Punkte Betrachten Sie die beiden folgenden Graphen G_1 und G_2.



G_1



G_2

Zeigen oder widerlegen Sie: G_1 und G_2 sind isomorph.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den Graphen G_1 aus der vorigen Aufgabe.

1 Punkt (a) Zeigen oder widerlegen Sie: G_1 ist bipartit.

3 Punkte (b) Bestimmen Sie ein maximales Matching von G_1.

4 Punkte (c) Beweisen Sie die Maximalität des in (b) gefundenen Matchings.

Aufgabe 5.

8 Punkte Sei $n \geq 3$. Kann es eine Valenzsequenz eines einfachen Graphen der Form

$$(n-1, n-2, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_3, a_2, a_1)$$

für geeignete $a_{n-2}, \ldots, a_1$ mit $n-2 \geq a_{n-2} \geq a_{n-3} \geq \ldots \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1$ geben?
Falls nein, für welche n? Begründen Sie Ihre Antwort.
Falls ja,

(a) geben Sie ein Beispiel eines solchen Graphen für ein $n \geq 4$ an;

(b) geben Sie für alle $n \geq 3$ einen solchen Graphen an.

(8 (falls nein) bzw. 3+5 Punkte (falls ja))

Aufgabe 6.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = 2n$ Knoten, von denen jeder den Knotengrad n habe. Enthalte G ferner keine induzierten Kreise ungerader Länge. Zeigen Sie:

3 Punkte (a) G enthält keine Kreise ungerader Länge.

6 Punkte (b) Es gilt $G = K_{n,n}$ (wobei $K_{n,n}$ den vollständigen bipartiten Graphen mit zwei Partitionen von je n Knoten bezeichnet).

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & -4 & -6 & 35 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

5 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: A ist positiv definit.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: 0 ist Eigenwert von A.

1 Punkt (d) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Aufgabe 8.

8 Punkte Lösen Sie folgendes nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & z & & & & & & \\ \text{unter} & z & + & 5x & + & 12y & = & 1 \\ & & & x^2 & + & y^2 & \leq & 169. \end{array}$$

Hinweis: Substituieren Sie z.

Aufgabe 9.

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \|x\|$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{R}^n$ bezeichne und $n \in \mathbb{N}$ wie in (a) bzw. (b) spezifiziert sei.

6 Punkte (a) Sei $n = 3$. Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konvex, aber nicht strikt konvex.

3 Punkte (b) Sei $n = 1$. Zeigen oder widerlegen Sie: f ist strikt unimodal.

Aufgabe 10.

5 Punkte Sei $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_1 x_2 x_3 x_4|$. Sei $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^\top \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Punkt. Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe

$$\min_{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4} F(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Koordinatensuche mit optimaler Schrittweite, startend bei x^*, benötigt höchstens zwei Iterationsschritte, um ein lokales Minimum von F zu finden.

Aufgabe 11.

7 Punkte Eine Ölraffinerie mischt Super (S), Normalbenzin (N) und Biosprit (B) aus den Rohölsorten R1, R2, R3 und Bioethanol R4. Pro Tag stehen ihr 20 Tonnen R1, 50 Tonnen R2, 120 Tonnen R3 und 10 Tonnen R4 zur Verfügung. Mit einer Tonne Super macht die Raffinerie einen Gewinn von 220 Euro mit einer Tonne Normalbenzin einen Gewinn von 234 Euro und mit einer Tonne Biosprit einen Gewinn von 333 Euro. Pro Tonne Rohstoff, den die Raffinerie nicht verbraucht, fällt bei R1 und R2 eine Strafzahlung von 84 Euro an, bei R3 und R4 sogar eine Strafzahlung von 175 Euro. Die Mischungsverhältnisse (Verbrauch der Rohstoffe in Tonnen pro Tonne des Endprodukts) sind in folgender Tabelle angegeben:

	R1	R2	R3	R4
S	0.12	0.32	0.51	0.05
N	0.07	0.05	0.83	0.05
B	0.19	0.29	0.41	0.11

Modellieren Sie die Aufgabe, den Gewinn der Raffinerie zu maximieren, als lineares Optimierungsproblem. (Eine Lösung des Optimierungsproblems wird nicht erwartet.)

9 Punkte **Aufgabe 12.**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -3x & + & y & & \\ \text{unter} & 4x & + & y & \geq & 10 \\ & & & y & \leq & 3 \\ & 2x & - & y & \geq & 2 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Hinweise: Grafische Lösung ist zulässig. Bei Benutzung von Bland's Rule tauchen in unseren Rechnungen im Simplextableau keine Nenner größer als 6 auf.