

6 Punkte **Aufgabe 1.**

Sei $r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

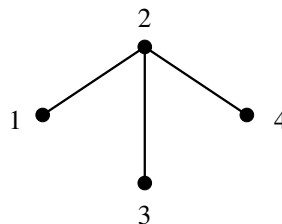
$$\sum_{k=1}^n (2rk - r + 1) = rn^2 + n.$$

5 Punkte **Aufgabe 2.**

In einer Gruppe von 30 Studierenden der Mathematik gibt es im SS 2012 genau 22 Studierende, die den Kurs Lineare Algebra bearbeiten, genau 14, die den Kurs Analysis bearbeiten und genau 13, die den Programmierkurs bearbeiten, genau 9, die die Kurse Lineare Algebra und Analysis bearbeiten, genau 10, die den Kurs Lineare Algebra und den Programmierkurs bearbeiten, genau 6, die den Kurs Analysis und den Programmierkurs bearbeiten, und genau 4, die alle drei Veranstaltungen (Lineare Algebra, Analysis, Programmierkurs) bearbeiten. Ein Studierender heiße *faul*, wenn er keine der drei Veranstaltungen bearbeitet. Gibt es faule Studierende in der Gruppe? Wenn ja, wieviele?

7 Punkte **Aufgabe 3.**

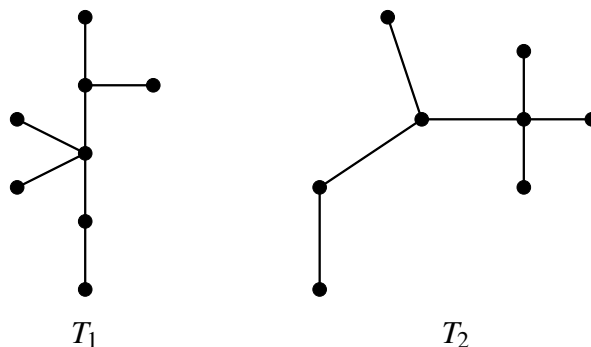
Betrachten Sie folgenden Graphen G .



Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 8 von Knoten 2 nach Knoten 2 in G .

Aufgabe 4.

Betrachten Sie die unten abgebildeten Bäume T_1 und T_2 .



6 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Bäume T_1 und T_2 sind isomorph.

2 Punkte (b) Wieviele Kanten muss man verschieben, damit die Bäume isomorph werden: 0, 1 oder 2? Begründen Sie Ihre Antwort.

4 Punkte **Aufgabe 5.**

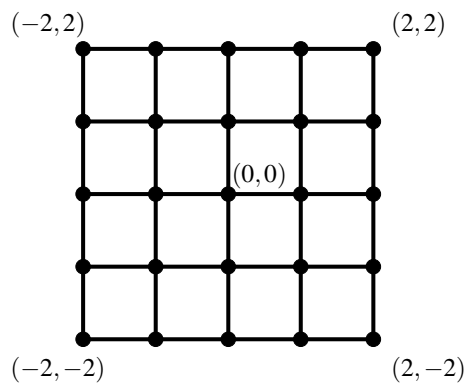
Zeigen oder widerlegen Sie: $(9, 9, 8, 6, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.
Geben Sie ggf. einen solchen Graphen an.

Aufgabe 6.

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Betrachten Sie den Graphen G_k , dessen Knotenmenge aus allen Paaren (a, b) besteht mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $-k \leq a \leq k$, $-k \leq b \leq k$. Zwei Knoten (a, b) und (a', b') aus der Knotenmenge von G_k seien genau dann in G_k benachbart, wenn eine der Komponenten gleich ist und die andere sich um genau 1 unterscheidet, also in den vier Fällen

- 1) $a = a'$ und $b = b' - 1$
- 2) $a = a'$ und $b = b' + 1$
- 3) $a = a' - 1$ und $b = b'$
- 4) $a = a' + 1$ und $b = b'$.

Der Graph G_2 ist unten abgebildet.



3 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Graph G_k ist bipartit.

4 Punkte (b) Zeigen Sie: G_k besitzt kein perfektes Matching.

6 Punkte (c) Sei $H_k := G_k \setminus (0, 0)$ der Graph, der aus G_k entsteht, wenn man den Mittelknoten $(0, 0)$ und alle an ihm anhängenden Kanten löscht.

Zeigen oder widerlegen Sie: H_k besitzt ein perfektes Matching.

5 Punkte **Aufgabe 7.**

Sei $x = 0.4 \cdot 10^{-57}$. Werten Sie den Ausdruck

$$(1 - 25x^2) \left(\frac{1}{1 - 5x} - \frac{1 + 10x}{1 + 5x} \right)$$

exakt aus.

Aufgabe 8.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 17 & -1 \\ 6 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

- 4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU -Zerlegung von A .
- 3 Punkte (b) Zählen Sie die Anzahl der bei der Bestimmung der LU -Zerlegung auftretenden nötigen Additionen, Multiplikationen und Divisionen.
- 1 Punkt (c) Berechnen Sie $\|A\|_1$.

10 Punkte Aufgabe 9.

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \text{unter} \quad & xy = 4 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 10y^2 - x - 2y.$$

- 6 Punkte (a) Führen Sie, ausgehend von $(0, 0)^\top$, eine Iteration des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines stationären Punktes von f durch.
- 1 Punkt (b) Wieviele Newton-Iterationen sind nötig, bis Sie einen stationären Punkt erreicht haben?

7 Punkte Aufgabe 11.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine konvexe Menge, die die Punkte $(0, 0)^\top$, $(0, 1)^\top$, $(1, 0)^\top$ und $(1, 1)^\top$ enthält. Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ gilt: $(x, y)^\top \in D$.

10 Punkte Aufgabe 12.

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x + 3y - 3z \\ \text{unter} \quad & x - y \leq 4 \\ & 2x - 2y - z \leq 3 \\ & 2x + 2y - z = 1 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

Tipps: Grafische Lösung ist zulässig. Bei Benutzung von Blands Rule tauchen in unseren Rechnungen im Simplextableau keine Nenner größer als 2 auf.