5 Punkte **Aufgabe 1.**

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}.$$

8 Punkte **Aufgabe 2.**

Seien $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen mit

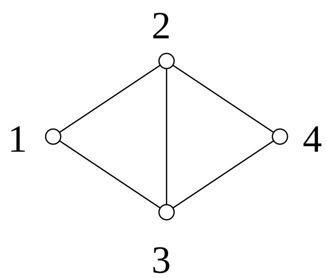
$$\begin{aligned} f(n) &:= n^2 \\ g(n) &:= n^4 - 10000 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $f = O(g)$.

Aufgabe 3.

Gegeben sei folgender Graph G mit Knotenmenge $\{1,2,3,4\}$:



2 Punkte (a) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix von G.

5 Punkte (b) Berechnen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4

(i) von Knoten 1 nach Knoten 1,

(ii) von Knoten 1 nach Knoten 2,

(iii) von Knoten 1 nach Knoten 4,

(iv) von Knoten 2 nach Knoten 2 bzw.

(v) von Knoten 2 nach Knoten 3.

3 Punkte **Aufgabe 4.**

Zeigen oder widerlegen Sie: $(9,8,7,6,6,6,3,3,3,1,1)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

Aufgabe 5.

Zeichnen Sie die gepflanzten Bäume zu folgenden Codes. Welcher der Codes ist Code eines Baumes? Begründen Sie Ihre Antworten.

3 Punkte (a) ((()(()()))(()()(()())))

3 Punkte (b) (((()()())())((())())())

3 Punkte (c) (((()()())()())(()()()))

6 Punkte **Aufgabe 6.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl $33\frac{17}{18}$ um ins Dreiersystem (3-adische Darstellung) in Kommaschreibweise.

Aufgabe 7.

Sei $\lambda > 0$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda^2+4 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda-2 & 11 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A der Form $LU = A$ mit unterer Dreiecksmatrix L und oberer Dreiecksmatrix U.

4 Punkte (b) Sei

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\|B\|_1$ in Abhängigkeit von λ.

8 Punkte **Aufgabe 8.**

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & 5x - xz + y^2 + 2y - yz \\ \text{unter} & \qquad\qquad x+z = 4 \end{array}$$

7 Punkte **Aufgabe 9.**

Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{1}{5^{4^n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie den Grenzwert und die Konvergenzrate der Folge.

Aufgabe 10.

Sei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A eine reelle $(m \times n)$-Matrix. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^\top x & & \\ \text{unter} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0. \end{array} \tag{1}$$

3 Punkte (a) Bestimmen Sie das dazu duale Programm.

4 Punkte (b) Es gebe $x \geq 0$ mit $Ax \geq b$ und $\tilde{y} \geq 0$ mit $\tilde{y}^\top A \leq -c^\top$. Zeigen Sie, dass der Zielfunktionswert des primalen Programms kleiner oder gleich dem Zielfunktionswert des dualen Programms ist, ohne Sätze des Kurses zu benutzen.

Aufgabe 11.

Ein Speiseeishersteller verwendet zur Herstellung von Eisschälchen zwei Grundzutaten: Sahne und Zucker. 1000 Gramm Sahne kosten ihn 2 Euro, 1000 Gramm Zucker kostet 1 Euro. Jedes Eisschälchen darf höchstens 50 Gramm wiegen. (Wir gehen dabei davon aus, dass es nur aus Sahne und Zucker besteht, Verpackung wird vernachlässigt; ferner geht bei der Produktion keine Sahne und kein Zucker verloren.) Damit das Eis genießbar ist, dürfen auf eine Gewichtseinheit Zucker höchstens 4 Gewichtseinheiten Sahne kommen; auf eine Gewichtseinheit Zucker müssen andererseits mindestens 3 Gewichtseinheiten Sahne in der Mischung kommen. Ferner muss ein Eisschälchen mindestens 32 Gramm Sahne enthalten. Es sollen 1000 Eisschälchen mit möglichst niedrigen Herstellungskosten produziert werden. Wieviel Sahne und Zucker sollte ein Eisschälchen dazu enthalten?

6 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem.

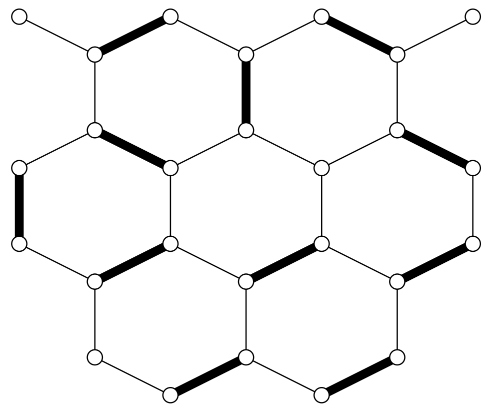
6 Punkte (b) Lösen Sie das Problem (graphisch oder mit einem Ad-Hoc-Argument).

Aufgabe 12.

Zeigen Sie:

2 Punkte (a) Der unten abgebildete Graph ist bipartit.

3 Punkte (b) Das fett eingezeichnete Matching ist nicht maximal.

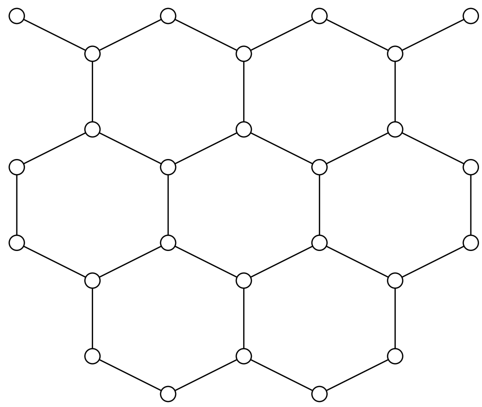


5 Punkte (c) Zeichnen Sie ein maximales Matching in die Darstellung des Graphen **auf dem nächsten Blatt** ein. Beweisen Sie darunter (und auf der Rückseite des Blattes) die Maximalität.

Wiederholung der Aufgabenstellung von 12 (c):

(c) Zeichnen Sie ein maximales Matching in die Darstellung des Graphen **unten** ein. Beweisen Sie darunter (und auf der Rückseite des Blattes) die Maximalität.

Geben Sie dieses Blatt unbedingt mit ab!



Beweis der Maximalität:

Konzept/Notizen
Der Inhalt dieses Kastens geht nicht in die Wertung ein, ist nur Hilfestellung.