Aufgabe 1.
Wir zeigen durch vollständige Induktion über n: Aus $x+1>0$ folgt $(x+1)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Induktionsanfang ($n=2$):

$$(x+1)^2 = x^2+2x+1 \overset{x^2\geq 0}{\geq} 1+2x.$$

Induktionsschritt:

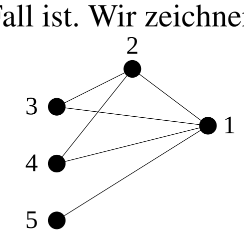
$$(x+1)^n = (x+1)^{n-1}(x+1) \overset{\substack{\text{IV}\\ x+1>0}}{\geq} (1+(n-1)x)(1+x) = 1+nx+(n-1)x^2 \overset{\substack{n-1\geq 1\\ x^2\geq 0}}{\geq} 1+nx.$$

Aufgabe 2.
a) Pro Frage gibt es $\binom{4}{2}=6$ Antwortmöglichkeiten, also insgesamt 6^3.
b) Von den je 6 Antwortmöglichkeiten sind genau 5 falsch. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fragen falsch beantwortet wurden $\frac{5^3}{6^3}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $1-\frac{5^3}{6^3} \approx 0.4323$.

Aufgabe 3.
a) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv:
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$.
b) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv: $\emptyset$

Aufgabe 4.
a) Zerlegung in paarweise disjunkte Zykel: $(1\,5\,7)(2\,3\,9\,8\,6)(4)$
b) in Transpositionen: $(1\,5)(5\,7)(2\,3)(3\,9)(9\,8)(8\,6)$

Aufgabe 5.
a) Die Summe der Knotengrade ist ungerade, also handelt es sich nicht um eine Valenzsequenz eines Graphen.
b) (4,3,2,2,1) ist Valenzsequenz $\iff$ (2,1,1,0) ist Valenzsequenz $\iff$ (0,0,0) ist Valenzsequenz, was offensichtlich der Fall ist. Wir zeichnen einen solchen Graphen:



c) (4,3,3,1,1) ist Valenzsequenz $\iff$ (2,2,0,0) ist Valenzsequenz, was offensichtlich nicht der Fall ist.

Aufgabe 6.

a) Die Pflanzung wird rekursiv so definiert, dass die Teilbäume, die durch die direkten Nachfolger eines Knotens definiert sind, nach ihrem Code lexikographisch aufsteigend von links nach rechts sortiert sind.

b) Die Exzentrizität eines Knotens v ist $\max_{w \in V} \operatorname{dist}(v,w)$. Das Zentrum sind die Knoten minimaler Exzentrizität. Bei Bäumen ist das Zentrum entweder ein einzelner Knoten oder zwei adjazente Knoten. Im ersten Fall nehmen wir den Zentrumsknoten als Wurzel. Im zweiten Fall nehmen wir den Knoten, auf dessen Seite der Baum mit dem lexikographisch kleineren Code steht.

c) i) $(()()((()())()))$

ii) $() \succ ((()())())$, also ist der ges. Code $((((()())())()())$

iii) Der ganz rechte Nachfolger von r hat die eindeutig kleinste Exzentrizität 2. Mit diesem Knoten als Wurzel und der kanonischen Pflanzung ist der Code $(((()())(()())()))$.

Aufgabe 7.

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right\| \rightsquigarrow \left\| \begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right\| \rightsquigarrow \left\| \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array} \right\|$$

Die LU-Zerlegung lautet also

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $b = (2,1,3)^\top$. Dann lösen wir zunächst das Gleichungssystem $Ly = b$ und es folgt durch Rückwärtseinsetzen $y = (2,-1,2)^\top$. Nun lösen wir das System $Ux = y$ ebenfalls durch Rückwärtseinsetzen und erhalten $x = (1,-1,1)^\top$.

Aufgabe 8.

Wir versuchen die Cholesky-Faktorisierung zu bestimmen:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1,\ l_{21} = \tfrac{a_{21}}{l_{11}} = 1,\ l_{31} = \tfrac{a_{31}}{l_{11}} = 1,$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 1,\ l_{32} = \tfrac{a_{32} - l_{21} l_{31}}{l_{22}} = 1,\ l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 1.$$

Also ist

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die gegebene Matrix somit positiv definit, da während des Algorithmus kein Ausdruck ≤ 0 unter der Wurzel auftrat.

Aufgabe 9.

a) Wegen $10_{(10)} = A_{(16)}$ ist $26_{(10)} = 1 \cdot 16 + 10 \cdot 1 = 1A_{(16)}$. Weiter haben wir $0.\overline{6} = \frac{2}{3}$ und somit

$$\begin{array}{ccccl} \frac{2}{3} & \div & \frac{1}{16} & = & 10 \text{ Rest } \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \div & \frac{1}{256} & = & 10 \text{ Rest } \frac{16}{24 \cdot 256} \quad \left(= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{24}\right). \end{array}$$

Also haben wir eine Periode der Länge 1 und es ist $26.\overline{6}_{(10)} = 1A.\overline{A}_{(16)}$.

b) $1101_{(2)} = 8+4+1 = 13$ und

$$0.\overline{01}_{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \tfrac{1}{3}.$$

Also ist $1101.\overline{01}_{(2)} = 13.\overline{3}_{(10)}$.

Aufgabe 10.

a) $\nabla f(x,y) = (2x, 4y)$, $\nabla g(x,y) = (-1,1)$. Damit lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen $2x = -\mu$, $4y = \mu$ mit $\mu \leq 0$ und $\mu g(x,y) = 0$.

b) Wir führen Fallunterscheidung bzgl. μ:

- $\mu = 0$: Dann folgt sofort $(x,y) = (0,0)$ mit Zielfunktionswert $f(0,0) = 0$. Dieser Punkt ist aber nicht zulässig. Also ist $(0,0)$ kein Kandidat für ein Extremum.
- $\mu \neq 0$: Dann muss wegen der Komplementaritätsbedingung $g(x,y) = 0$ gelten, also $x = y+2$. Setzen wir dies in die Kuhn-Tucker-Bedingung ein, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2y+4 &= -\mu \\ 4y &= \mu, \end{aligned}$$

  also durch Umstellen der zweiten Zeile nach μ und Einsetzen in die erste Gleichung $y = -\frac{2}{3}$ und $\mu = -\frac{8}{3} < 0$ und durch Einsetzen in g $x = \frac{4}{3}$. Dieser Punkt ist also wegen $\mu \leq 0$ ein Kandidat für ein Minimum.

c) Für den Punkt $(x,y,\mu) = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3})$ erhalten wir als L-Matrix für die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung

$$L = \nabla^2 f(x,y) - \mu \nabla^2 g(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) - \mu \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right).$$

Diese Matrix ist positiv definit, also insbesondere auf dem Tangentialraum der mit Gleichheit erfüllten Nebenbedingungen, die mit $\mu < 0$ in die Kuhn-Tucker-Bedingungen eingehen. Folglich ist $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ ein striktes lokales Minimum.

Aufgabe 11.

Wir bringen das Problem zunächst in Normalform, indem wir die Zielfunktion zu einer Maximierung machen und für die ersten beiden Nebenbedingungen Schlupfvariablen einführen.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \max & -2x_1 & - & 5x_2 & - & 5x_3 & & & & & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & s_1 & & & \leq & 5 \\ & & & x_2 & + & x_3 & & & + & s_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & & x_1,x_2,x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Da wir keine zulässige Basis haben, müssen wir mit Phase 1 des Simplex-Algorithmus starten und in der dritten Nebenbedingung eine künstliche Schlupfvariable einführen. Das Tableau hat dann die folgende Gestalt:

$$
\begin{array}{|rrrrr|r|r|}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
-2 & -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{|rrrrr|r|r|}
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-2 & -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
\boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

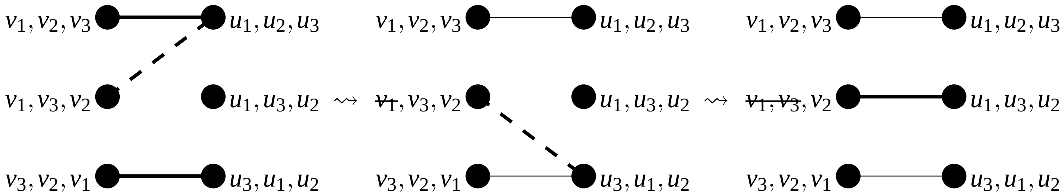
$$
\rightsquigarrow
\begin{array}{|rrrrr|r|r|}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
0 & -3 & -7 & 0 & 0 & 2 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Dieses Tableau ist optimal bzgl. der Hilfszielfunktion in der ersten Zeile. Also können wir die erste Zeile und die vorletzte Spalte streichen. Dann ist aber auch die eigentliche Zielfunktionszeile überall ≤ 0. Wir können also direkt die optimale Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ mit Zielfunktionswert 2 (der originalen Zielfunktion) ablesen.

Aufgabe 12.

Die Hochzeit $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)\}$ ist sowohl männer- als auch frauenoptimal. Dies ermittelt man mit dem Algorithmus Men propose – Women dispose (bzw. umgekehrt) wie folgt:

- Männeroptimal:



- Frauenoptimal: