Liebe Kursteilnehmer,

nachfolgend finden Sie eine Probeklausur, die Sie auf die richtige Klausur vorbereiten soll. Anhand dieser Aufgaben können Sie den Umfang dessen abschätzen, was Sie später erwarten wird. Wir bemerken jedoch ausdrücklich, dass die Aufgaben keineswegs die Themengebiete festlegen, um die es sich in der Klausur dreht. Ein Durchrechnen der Probeklausur ist also keine hinreichende Klausurvorbereitung, da auch komplett andere Aufgabentypen eine Rolle spielen werden.

Diese Probeklausur sowie die richtige Klausur sind als „Auswahlklausur" zu verstehen, das heißt sie umfassen mehr Aufgaben, als in der Zeit von zwei Stunden zu schaffen ist. Lösen Sie alle Aufgaben, so entspräche dies 150%. Die Grenze zum Bestehen liegt bei etwa einem Drittel der möglichen Punkte.

Beachten Sie bitte auch, dass, wie bereits im Anschreiben erwähnt, ein doppelseitig handschriftlich beschriebenes A4-Blatt mit Notizen benutzt werden darf.

6 Punkte **Aufgabe 1.**
Zeigen Sie: Aus $x+1>0$ folgt $(x+1)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

6 Punkte **Aufgabe 2.**
Sie wollen einen Multiple-Choice-Test bestehen, für den Sie nicht gelernt haben. Der Test besteht aus 3 Fragen, für die es je 4 Antwortmöglichkeiten gibt.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Fragen zu beantworten, wenn je Frage genau zwei Kreuze gesetzt werden sollen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Ankreuzen den Test zu bestehen, wenn dafür mindestens eine der Fragen komplett richtig beantwortet werden muss?

Hinweis zu b): Betrachten Sie das „komplementäre" Ereignis, d. h. dass gar keine Frage richtig beantwortet wird.

6 Punkte **Aufgabe 3.**
Sei $A := \{1, \ldots 5\}$. Geben Sie je eine Relation $R \subseteq A \times A$ an, die

a) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist,
b) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

7 Punkte **Aufgabe 4.**
Zerlegen Sie die Permutation $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

a) in paarweise disjunkte Zykel,
b) in Transpositionen (Zykel der Länge 2).

6 Punkte **Aufgabe 5.**

Welche der folgenden Sequenzen ist die Valenzsequenz eines (einfachen) Graphen? Zeichnen Sie gegebenenfalls einen solchen Graphen.

a) (4,3,2,1,1),

b) (4,3,2,2,1),

c) (4,3,3,1,1).

12 Punkte **Aufgabe 6.**

a) Definieren Sie zu einem gegebenen Wurzelbaum eine kanonische Pflanzung.

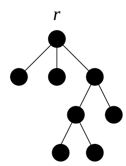
b) Definieren Sie, wie man in einem Baum bis auf Isomorphie eindeutig eine Wurzel festlegen kann.

c) Bestimmen Sie den Code des folgenden

   i) gepflanzten Baums mit Wurzel r und der durch die Zeichnung implizierten Reihenfolge der Nachfolger,

   ii) Wurzelbaums mit Wurzel r,

   iii) Baums.



11 Punkte **Aufgabe 7.**

Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und lösen Sie mit deren Hilfe das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (2,1,3)^\top$.

7 Punkte **Aufgabe 8.**

Bestimmen Sie ob die folgende Matrix positiv definit ist und geben Sie gegebenenfalls die Cholesky-Zerlegung an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6 Punkte **Aufgabe 9.**

Wandeln Sie

a) die Dezimalzahl $26.\overline{6}$ in eine Hexadezimalzahl um,

b) die Binärzahl $1101.\overline{01}$ in eine Dezimalzahl um.

9 Punkte **Aufgabe 10.**

Gegeben sei das folgende Maximierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & x^2 + 2y^2 \\ \text{unter} & x - y - 2 \geq 0. \end{array}$$

a) Stellen Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen auf und
b) finden Sie mit deren Hilfe die Lösung des Problems.
c) Beweisen Sie, dass es sich um ein lokales Minimum handelt.

8 Punkte **Aufgabe 11.**

Lösen Sie folgendes Lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\min & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

6 Punkte **Aufgabe 12.**

Bestimmen Sie für die folgende Probleminstanz eine männeroptimale und eine frauenoptimale stabile Hochzeit. Die Menge der Männer sei $U := \{u_1, u_2, u_3\}$, die Menge der Frauen $V := \{v_1, v_2, v_3\}$ und die Totalordnungen eines Spielers auf der Menge des jeweils anderen Geschlechts sei gegeben durch je eine Präferenzliste. Dabei bedeutet z. B. die Liste (u_1, u_2, u_3) des Spielers v_1, dass $u_3 \prec_{v_1} u_2 \prec_{v_1} u_1$ ist.

$u_1\colon\ (v_1, v_2, v_3)$
$u_2\colon\ (v_1, v_3, v_2)$
$u_3\colon\ (v_3, v_2, v_1)$
$v_1\colon\ (u_1, u_2, u_3)$
$v_2\colon\ (u_1, u_3, u_2)$
$v_3\colon\ (u_3, u_1, u_2)$.