6 Punkte **Aufgabe 1.**

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)(i+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

Aufgabe 2.

Zerlegen Sie die folgende Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 1 & 4 & 8 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3 Punkte a) in paarweise disjunkte Zykel,

2 Punkte b) in Transpositionen (Zykel der Länge 2).

Aufgabe 3.

4 Punkte a) Gibt es einen Graphen mit Valenzsequenz $(6,3,3,3,3,3,3)$?

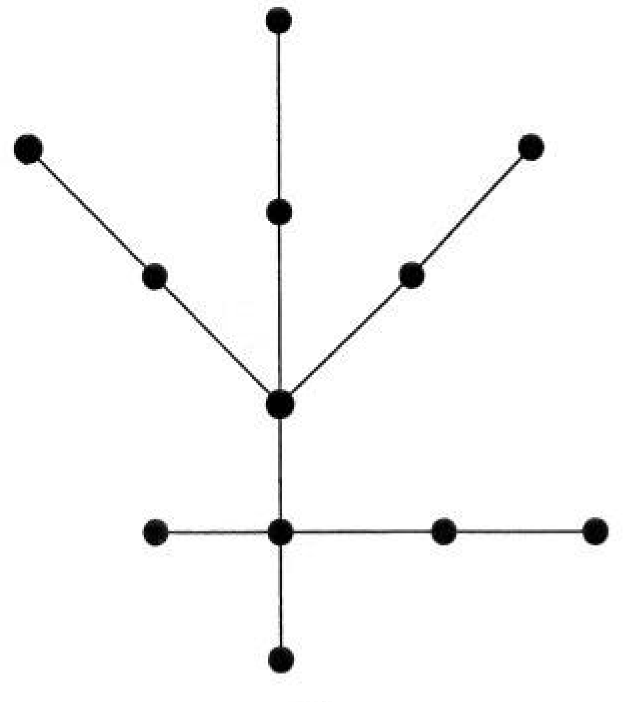
4 Punkte b) Im Falle der Existenz geben Sie zwei nicht isomorphe Graphen mit der obigen Valenzsequenz an.

6 Punkte **Aufgabe 4.**

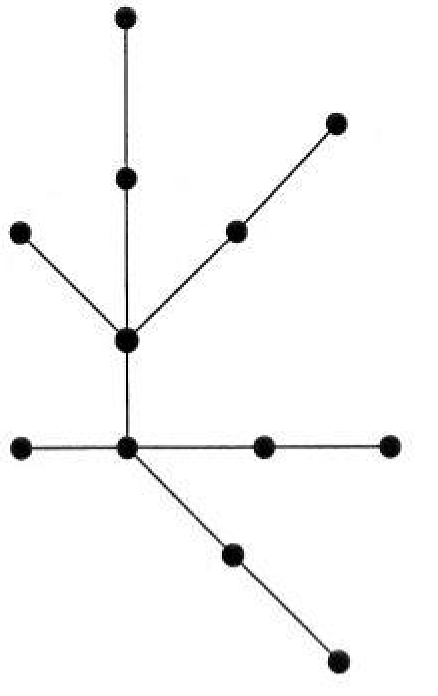
Sei K_n der vollständige Graph mit $n \geq 1$ Knoten. Für welche n hat der K_n eine Eulertour? Beweisen Sie Ihre Aussage.

6 Punkte **Aufgabe 5.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Die folgenden beiden Graphen G_1 und G_2 sind isomorph.



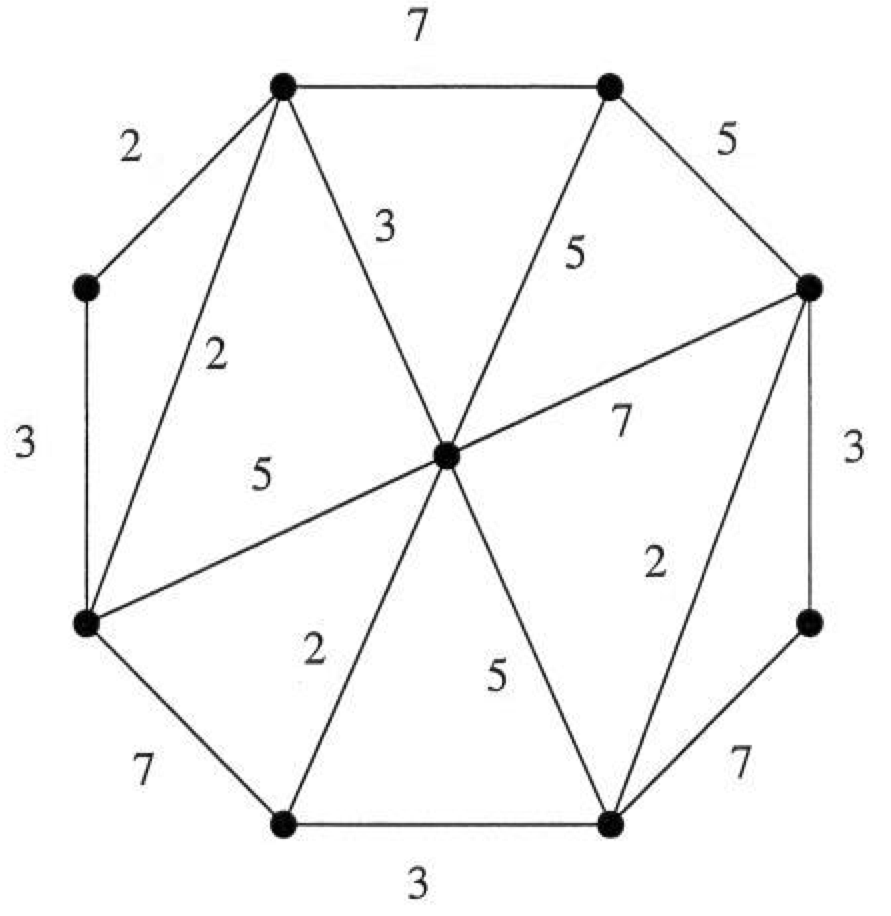
G_1



G_2

6 Punkte **Aufgabe 6.**

Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum des folgenden gewichteten Graphen:



Aufgabe 7.

Schreiben Sie

3 Punkte a) $\frac{1}{7}$ im Dualsystem, und

3 Punkte b) $\frac{1}{5}$ im 11-er-System.

Aufgabe 8.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte a) Bestimmen Sie die LU-Zerlegung von A.

3 Punkte b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + 2y^2 \\ \text{unter} \quad & x - y - 4 = 0 \end{aligned}$$

5 Punkte a) Lösen Sie das obige Problem.

5 Punkte b) Lösen Sie das Problem, bei dem zusätzlich $y \geq 0$ gefordert wird.

5 Punkte **Aufgabe 10.**

Bestimmen Sie die Konvergenzrate der Folge

$$\left(\frac{1}{2^{3^n}}\right)_{n\geq 0}.$$

Aufgabe 11.

Ein Spielmacher und ein Spieler spielen das folgende Spiel. Der Spieler rät zwei Zahlen aus der Menge $\{1,2,3,4\}$. Danach zieht der Spielmacher zufällig ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus einer Urne mit 4 Kugeln, die mit 1, 2, 3 und 4 beschriftet sind. Ziel des Spielers ist es, die Kugeln zu erraten, die gezogen wurden. Außerdem würfelt der Spielmacher mit einem sechsseitigen Würfel. Wenn der Spieler 2 richtige Zahlen geraten hat und eine sechs gewürfelt wurde, erhält er 40 Euro. Wenn der Spieler genau eine richtige Zahl geraten hat und eine sechs gewürfelt wurde, erhält er 10 Euro. Wenn der Spieler keine richtige Zahl geraten hat und eine sechs gewürfelt wurde, erhält er 4 Euro. Wenn der Spieler 2 richtige Zahlen geraten hat, aber keine sechs gewürfelt wurde, erhält er 1 Euro. In allen anderen Fällen muss er 5 Euro an den Spielmacher bezahlen.

3 Punkte a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler genau eine richtige Kugel errät?

7 Punkte b) Was ist der erwartete Gewinn des Spielers bei diesem Spiel?

Aufgabe 12.

Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplexalgorithmus. Verwenden Sie Bland's Rule.

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & & \\
\text{unter} & -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\
 & & & & & x_1,x_2,x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

3 Punkte a) Stellen Sie das Hilfsproblem für Phase 1 auf.

7 Punkte b) Führen Sie Phase 1 durch.

4 Punkte c) Sofern möglich, führen Sie Phase 2 durch. Falls nicht, erklären Sie, weshalb Phase 2 nicht durchführbar ist.

Hinweis: Bei unserer Rechnung traten als (gekürzte) Nenner höchstens 2 und 3 auf. Falls Optimallösungen existieren, sind diese ganzzahlig.