

--	--	--	--	--	--	--	--

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität - 58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141) WS 2016/17

DATUM: 04.03.2017
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	12	12	10	10	10	10	8		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	
--------------------------	--

Klausur am 04.03.2017:**Aufgabenstellungen**

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

[8 Punkte]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über \mathbb{R}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

[12 Punkte]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + b + c & a - b \\ 2a + c & 2b + c \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie $\text{Kern}(f)$ und Basen von $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$.

[12 Punkte]

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die lokalen Minima bzw. Maxima der Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [0, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$.

[10 Punkte]

Aufgabe 5

Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall I streng monoton und differenzierbar; es seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) = g(b) = 0$. Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in (a, b)$ gibt mit

$$\frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

[10 Punkte]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihen

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + 1}$$

auf Konvergenz.

[3 + 3 + 4 = 10 Punkte]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx.$$

[10 Punkte]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (D \vee (B \wedge \neg C)) \rightarrow A.$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[8 Punkte]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	\mathbb{R}	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	\mathbb{R}	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	\mathbb{R}	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k + 1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$