Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt. Es gilt aber tatsächlich

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & m & 1 \end{array}\right).$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & m & 1 \end{array}\right),$$

subtrahieren von der zweiten das dreifache der ersten und von der dritten das doppelte der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -1 \end{array}\right),$$

multiplizieren die zweite mit -1 und subtrahieren sie dann von der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -1 \end{array}\right) \qquad (*) .$$

Nun müssen wir unterscheiden:

1. Im Fall $m = 0$ haben wir (nachdem wir die letzte Zeile noch mit -1 multipliziert und von der ersten subtrahiert haben) die TNF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} ,$$

also ist Rg(A)=2, aber Rg($A|b$)=3, und das Gleichungssystem hat keine Lösung.

2. In allen anderen Fällen ($m \neq 0$) können wir in $(*)$ die letzte Zeile durch a dividieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

und erhalten (indem wir die dritte Zeile zur ersten addieren und von der zweiten subtrahieren) die TNF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix} .$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 = -\frac{1}{m} , \quad x_3 \text{ beliebig} , \quad x_2 = \frac{1}{m} - 2x_3 , \quad x_1 = 1 - \frac{1}{m}$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(A) = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ a = d = 0 \ \Leftrightarrow \ A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} = \{ b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} \mid b, c \in \mathbb{R} \}$. Die Einheitsmatrizen E_{12} und E_{21} bilden also ein Erzeugendensystem von Kern(f), und da sie linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis von Kern(f). Diese Basis kann durch E_{11} und E_{22} zur (kanonischen) Basis von $M_{22}(\mathbb{R})$ ergänzt werden, und $f(E_{11})$ und $f(E_{22})$, also $f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bilden dann eine Basis von Bild(f).

Bild(f) ist also ganz $\mathbb{R}^2$; das hätte man auch mit dem Rangsatz zeigen können, oder man konnte einfach nachrechnen, dass f surjektiv ist (und dann irgendeine Basis von $\mathbb{R}^2$ angeben).

Aufgabe 4

a) Für $a_n = \frac{\sin(n)\cdot\cos(n)}{n}$ gilt $|\sin(n)| \leq 1, |\cos(n)| \leq 1$, also $|a_n| \leq \frac{1}{n}$. Damit ist a_n eine Nullfolge.

b) $\sin(x)$ und x sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x = 0$ jeweils den Wert 0 an; $\cos(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (und differenzierbar) und nimmt in $x = 0$ den Wert 1 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \ ,$$

da der rechte Grenzwert existiert; damit gilt auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\cos(x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1\cdot 1 = 1 \ .$$

Aufgabe 5

f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \cos(x) - x\cdot\sin(x)$. Das ist eine stetige Funktion mit $f'(0) = 1 - 0 = 1 > 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1 < 0$. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat damit f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0, \frac{\pi}{2})$. Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0, \frac{\pi}{2})$ gilt $f''(x) = -\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) < 0$ (weil $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv sind), also ist f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallend. Somit hat f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ genau eine Nullstelle x_0, und wegen $f''(x_0) < 0$ liegt hier ein Maximum von f vor.

Aufgabe 6

Für $a_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n!n^n} = \frac{(n+1)n!(n+1)(n+1)^n(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n^n}\\
&= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\
&\to \frac{1}{4}\cdot e < 1 \text{ für } n\to\infty \ ,
\end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 7

a) Wir setzen $f(x) = x$, $g'(x) = \cos(x)$, also $f'(x) = 1$ und (z.B.) $g(x) = \sin(x)$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\,dx &= x \cdot \sin(x)\big|_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin(x)\,dx \;=\; x \cdot \sin(x)\big|_0^\pi - (-\cos(x))\big|_0^\pi \\ &= x \cdot \sin(x)\big|_0^\pi + \cos(x)\big|_0^\pi \;=\; \pi \cdot \sin(\pi) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(\pi) - \cos(0) \\ &= 0 - 0 + (-1) - 1 \;=\; -2\,.\end{aligned}$$

b) Wir substituieren $x - 1 = g(x)$, also $g'(x) = 1, g(2) = 1, g(3) = 2$, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x+1}{x-1}\,dx &= \int_2^3 \frac{g(x)+2}{g(x)}\,g'(x)\,dx \;=\; \int_1^2 \frac{u+2}{u}\,du \;=\; \int_1^2 1 + \frac{2}{u}\,du \;=\; u + 2\ln(u)\big|_1^2 \\ &= 2 + 2\ln(2) - (1 + 2\ln(1)) = 2 + 2\ln(2) - (1+0) \;=\; 1 + 2\ln(2)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 8

a) Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll}\alpha &=& (A \to B) \vee (C \to (B \wedge D)) & \\ &\approx& (\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee (B \wedge D)) & \text{Junktorminimierung} \\ &\approx& \neg A \vee B \vee \neg C \vee (B \wedge D) & \text{Klammern weglassen .}\end{array}$$

Dies ist bereits eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{array}{rcll}\alpha &\approx& (\neg A \vee B \vee \neg C) \vee (B \wedge D) & \text{Klammern} \\ &\approx& ((\neg A \vee B \vee \neg C) \vee B) \wedge ((\neg A \vee B \vee \neg C) \vee D) & \text{Distributivgesetz} \\ &\approx& (\neg A \vee B \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) & \text{Klammern weglassen} \\ &\approx& (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) & \text{Kommutativgesetz, Idempotenz .}\end{array}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

b) Die Wahrheitstafel ergibt

β	γ	$\beta \vee \gamma$	$\beta \wedge (\beta \vee \gamma)$
0	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Der Vergleich der ersten und letzten Spalte zeigt, dass β und $\beta \wedge (\beta \vee \gamma)$ äquivalent sind.

c) Die KNF, die wir in Teil a) für α gefunden haben, hat (wenn wir wieder entsprechend klammern) die Form

$$\alpha \approx \beta \wedge (\beta \vee \gamma)$$

mit $\beta = \neg A \vee B \vee \neg C\,,\ \gamma = D$. Nach Teil b) gilt damit

$$\alpha \approx \beta = \neg A \vee B \vee \neg C$$

– und das ist als einzelne Klausel gleichzeitig DNF und KNF. Insbesondere ist α von D unabhängig.