FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2015/16

DATUM: 27.02.2016
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	14	10	10	8	8	10	12		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von der Konstanten $m \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

[*14 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie ggf.:

$$a) \ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n) \cdot \cos(n)}{n} \ , \qquad b) \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{x} \ .$$

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = x \cdot \cos(x)\,$, im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ genau ein lokales Maximum hat.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Begründen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

konvergiert oder divergiert.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$a) \quad \int_0^{\pi} x\,\cos(x)\,dx \quad , \qquad b) \quad \int_2^{3} \frac{x+1}{x-1}\,dx \ .$$

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 8

a) Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \to B) \vee (C \to (B \wedge D)) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

b) Zeigen Sie per Wahrheitstafel, dass für zwei Formeln β, γ stets $\beta \wedge (\beta \vee \gamma) \approx \beta$ gilt.

c) Finden Sie damit eine Normalform von α aus a), die gleichzeitig DNF und KNF ist?

[*6 + 3 + 3 = 12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$