Mathematische Grundlagen (01141) WS 2014/15

Klausur am 28.03.2015:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 10 \geq 4$. Es gilt also der Induktionsanfang. Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $a_n \geq 4$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $a_{n+1} \geq 4$ folgt. Es gilt aber (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion) tatsächlich

$$a_{n+1} = 2 + \sqrt{2a_n - 1} \geq 2 + \sqrt{2 \cdot 4 - 1} = 2 + \sqrt{7} \geq 2 + \sqrt{4} = 4 \ .$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right) .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das dreifache und von der dritten das vierfache der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) ,$$

dann vertauschen wir die zweite mit der dritten Zeile und ziehen anschließend von der neuen zweiten die dritte ab

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

und müssen nur noch das doppelte der zweiten zur ersten addieren und das vierfache der zweiten von der dritten subtrahieren, um die Treppennormalform zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right) .$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 \text{ beliebig }, \quad x_3 = -6 - 2x_4 \quad , \quad x_2 = 1 \ , \quad x_1 = 3 - x_4$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Einfacher als das sich aufdrängende $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist z.B. die Wahl $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; aus $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ folgt dann

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

also $a = 0$ und dann der Reihe nach auch $b = 0$ und $c = 0$. x_1, x_2 und x_3 sind somit linear unabhängig und bilden (als drei linear unabhängige Vektoren im dreidimensionalen $\mathbb{R}^3$) eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

a) In $V = \mathbb{R}^2$ können wir z.B. $f : V \to V$, $f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ definieren; dass die Matrizenmultiplikation eine lineare Abbildung ist, haben wir im Kurs gezeigt, und es ist

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Kern}(f) \Leftrightarrow f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ a = 0 \, , \ b \text{ beliebig}$$

und

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Bild}(f) \ \Leftrightarrow \ \text{es gibt } x, y \text{ mit } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ a = 0 \, , \ b \text{ beliebig} \, ;$$

also ist tatsächlich Kern(f)=Bild(f).

b) Für $V = \mathbb{R}^3$ kann es kein entsprechendes f geben: Wenn Kern(f)=Bild(f) sein soll, muss auch dim(Kern(f))=dim(Bild(f)) gelten; wenn wir das in den Rangsatz einsetzen, erhalten wir dim(V)=dim(Kern(f))+dim(Bild(f))=2 dim(Kern(f)) . Für dim(V)=3 ist das nicht zu erfüllen.

Aufgabe 5

a) In Aufgabe 1 ist bereits gezeigt worden, dass die Folge (a_n) nach unten zumindest durch 4 beschränkt ist; wenn wir noch zeigen können, dass sie monoton fallend ist, ist sie automatisch auch nach oben beschränkt und nach dem Monotonieprinzip konvergent (mit Grenzwert ≥ 4). Bei einer rekursiv definierten Folge geht das nur mit (erneuter) vollständiger Induktion.

Wir wollen also zeigen, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 10$, $a_2 = 2 + \sqrt{2 \cdot 10 - 1} = 2 + \sqrt{19} \leq 2 + \sqrt{25} = 7$, also $a_2 \leq a_1$.

Es gilt also der Induktionsanfang. Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ folgt. Es gilt aber (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion) tatsächlich

$$a_{n+2} = 2 + \sqrt{2a_{n+1} - 1} \leq 2 + \sqrt{2a_n - 1} = a_{n+1} \ .$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Also ist die Folge (a_n) monoton fallend und nach unten durch 4 beschränkt, konvergiert daher nach dem Monotonieprinzip gegen a mit $a \geq 4$. Aus der Rekursion für a_n und der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt aber

$$\begin{aligned} & a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(2 + \sqrt{2a_n - 1}) = 2 + \sqrt{2 \cdot (\lim_{n\to\infty} a_n) - 1} = 2 + \sqrt{2a - 1} \\ \Rightarrow \quad & (a-2)^2 = 2a - 1 \ \Leftrightarrow \ a^2 - 6a + 5 = (a-5)(a-1) = 0 \ , \end{aligned}$$

also (wegen $a \geq 4$) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

b) Zu untersuchen ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n = \left(\frac{3}{a_n}\right)^n$; dafür gilt ($a_n \geq 4$ dürfen wir verwenden)

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{3}{a_n} \leq \frac{3}{4} =: q < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 6

f mit $f(x) = x^{-1}\ln(x)$ ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = -x^{-2}\ln(x) + x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-2}(1 - \ln(x))$. Der Faktor x^{-2} ist immer positiv, das Vorzeichen von f' wird also von $h(x) = 1 - \ln(x)$ bestimmt. Das ist eine stetige Funktion mit $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$, und weil ln monoton steigend ist, ist h monoton fallend; also gilt $h(x) > 0$ für $x < x_0$ und $h(x) < 0$ für $x > x_0$, und dasselbe gilt dann auch für f'. f hat somit in $x_0 = e$ ein lokales Maximum, und da f' keine weiteren Nullstellen hat, kann es keine weiteren Extrema geben.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x^{-2}$, also $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und (z.B.) $g(x) = -x^{-1}$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^{-2}\ln(x)\,dx &= -x^{-1}\ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (-x^{-1})x^{-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(2) - (-1)\ln(1) + \int_1^2 x^{-2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2) + (-x^{-1})\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1 - \ln(2)) \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{array}{lcll}
\alpha & = & ((B \vee \neg C) \wedge \neg D) \rightarrow \neg A & \\
 & \approx & \neg A \vee \neg((B \vee \neg C) \wedge \neg D) & \text{Junktorminimierung} \\
 & \approx & \neg A \vee (\neg(B \vee \neg C) \vee D) & \text{de Morgan, Negationsregel} \\
 & \approx & \neg A \vee ((\neg B \wedge C) \vee D) & \text{de Morgan} \\
 & \approx & \neg A \vee (\neg B \wedge C) \vee D & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}$$

Dies ist eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{array}{lcll}
\alpha & \approx & (\neg A \vee (\neg B \wedge C)) \vee D & \text{Klammern} \\
\alpha & \approx & ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C)) \vee D & \text{Distributivgesetz} \\
\alpha & \approx & ((\neg A \vee \neg B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee C) \vee D) & \text{Distributivgesetz} \\
\alpha & \approx & (\neg A \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee C \vee D) & \text{Klammern weglassen .}
\end{array}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.