FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2014/15

DATUM: 28.03.2015
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise
(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	12	6	12	12	10	10	10		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Eine Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_1 = 10 \ , \quad a_{n+1} = 2 + \sqrt{2a_n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n \geq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (woraus insbesondere erst folgt, dass die Folgenglieder für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind!).

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \ .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Ergänzen Sie

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$; zeigen Sie, dass Sie tatsächlich eine Basis gefunden haben.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils für

$$a) \ \ V = \mathbb{R}^2 \quad , \qquad b) \ \ V = \mathbb{R}^3$$

entweder eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit Kern(f)=Bild(f) an oder begründen Sie, warum es eine solche Abbildung nicht geben kann.

[*6 + 6 Punkte*]

Aufgabe 5

Es sei (a_n) die in Aufgabe 1 definierte Folge.
a) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
b) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{a_n}\right)^n \ ?$$

Hinweise: Monotonieprinzip; das Ergebnis von Aufgabe 1 kann ohne Beweis benutzt werden.

[*7 + 5 Punkte*]

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,, f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ und deren Art.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \ .$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = ((B \vee \neg C) \wedge \neg D) \to \neg A \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$