Mathematische Grundlagen (01141) WS 2013/14

Klausur am 29.03.2014:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $A^{n_0} = A$, und $\begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A = A^1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt. Es gilt aber tatsächlich

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2 + 0 & 2^n + (2^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2 \cdot 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile das zweifache und von der dritten das dreifache der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right),$$

dann von der dritten die zweite

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und müssen nur noch das doppelte der dritten zur ersten addieren und das vierfache der dritten von der zweiten subtrahieren, um die Treppennormalform zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können auch die TNF „von unten“ auflösen und erhalten

$$x_4 = 1 \ , \quad x_3 \text{ beliebig} \ , \quad x_2 = -6 - 2x_3 \ , \quad x_1 = 3 - x_3$$

(mit dem gleichen Ergebnis).

Aufgabe 3

Es ist

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(A) = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & a+2b \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a+b = a-b = a+2b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} = \{ c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22} \mid c, d \in \mathbb{R} \}$. Die Einheitsmatrizen E_{21} und E_{22} bilden also ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(f)$, und da sie linear unabhängig sind, bilden sie auch eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Diese Basis kann durch E_{11} und E_{12} zur (kanonischen) Basis von $M_{22}(\mathbb{R})$ ergänzt werden, und $f(E_{11})$ und $f(E_{12})$, also $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ bilden dann eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 4

f ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x} e^{-x} - \ln(x) e^{-x} = \left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right) e^{-x}$. Der Faktor e^{-x} ist immer positiv, das Vorzeichen von f' wird also von $h(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ bestimmt. Das ist eine stetige Funktion mit (z.B.) $h(1) = 1 - 0 = 1 > 0$, $h(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ (wegen $e > 1$). Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat h und damit auch f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0, \infty)$. (Genauer gilt x_0 in $(1, e)$, aber das interessiert uns jetzt nicht.) Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0, \infty)$ sind $\frac{1}{x}$ und $-\ln(x)$ streng monoton fallend (denn $\ln(x)$ ist streng monoton wachsend), insgesamt ist also h streng monoton fallend. (Das folgt auch aus $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für $x > 0$.) Damit ist $h(x) > 0$ für $x < x_0$ und $h(x) < 0$ für $x > x_0$, und dasselbe gilt dann auch für f'. Also hat f in x_0 ein Maximum, und es kann keine weiteren Extrema geben.

Aufgabe 5

$x\sin(x)$ und $\ln(1+x^2)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x=0$ jeweils den Wert 0 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x\to0}\frac{\sin(x)+x\cos(x)}{2x\cdot\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{\sin(x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{2}\cos(x)\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}\cos(0)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}\ ,\end{aligned}$$

<u>wenn</u> $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}$ (und damit die ganze rechte Seite) existiert. Dafür kann aber wieder de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{1}=\frac{1}{1}=1\ ,$$

also tatsächlich

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)}=\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}=1\ .$$

Aufgabe 6

Die Potenzreihe hat die Koeffizienten $a_n=\frac{e^{n+2}}{n}$, also gilt $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt[n]{e^n}\cdot\sqrt[n]{e^2}}{\sqrt[n]{n}}=e\cdot\frac{\sqrt[n]{e^2}}{\sqrt[n]{n}}$, also ($\lim\sqrt[n]{n}=1$ und $\lim\sqrt[n]{c}=1$ für jedes $c>0$ kennen wir) $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=e$; also gilt nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard $R=\frac{1}{e}$. Die Potenzreihe konvergiert also für $x\in(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$ und divergiert für $|x|>\frac{1}{e}$.

Die Ränder des Konvergenzintervalls sind gesondert zu untersuchen: Für $x=\frac{1}{e}$ erhalten wir die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+2}}{ne^n}=e^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, also (bis auf einen Faktor) die divergente harmonische Reihe, für $x=-\frac{1}{e}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+2}}{n}(-1)^n\frac{1}{e^n}=e^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, also (bis auf einen Faktor) die nach dem Leibnizkriterium konvergente alternierende harmonische Reihe. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also genau für $x\in[-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

Wegen $2<e$ gilt $\frac{1}{2}>\frac{1}{e}$, also $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{e}$, also divergiert die Reihe für $x=-\frac{1}{2}$; wegen $3>e$ gilt $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{e}$, also konvergiert die Reihe für $x=\frac{1}{3}$.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x)=\ln(x)$, $g'(x)=x^2$, also $f'(x)=\frac{1}{x}$ und (z.B.) $g(x)=\frac{x^3}{3}$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^2\ln(x)\cdot x^2\,dx &= \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}\,dx = \frac{8}{3}\ln(2)-\frac{1}{3}\ln(1)-\int_1^2\frac{x^2}{3}\,dx\\ &= \frac{8}{3}\ln(2)-\frac{x^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2)-\frac{8}{9}+\frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln(2)-\frac{7}{9}\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Aus der Wahrheitstafel folgt unmittelbar (durch „Aufzählung der Einsen“) die DNF

$$\alpha \approx (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Diese können wir weiter umformen zu

$$\begin{array}{lll} \alpha \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((\neg A \wedge (B \wedge C)) \vee (A \wedge (B \wedge C))) & \text{Klammern setzen} \\ \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((\neg A \vee A) \wedge (B \wedge C)) & \text{Distributivgesetz} \\ \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((B \wedge C)) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } 1 \wedge \beta \approx \beta \\ \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Dies ist ebenfalls eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α, mit nur noch zwei Monomen.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{array}{lll} \alpha \approx & ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee B) \wedge ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee C) & \text{Distributivgesetz} \\ \approx & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee B)) & \\ & \wedge((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee C)) & \text{Distributivgesetz} \\ \approx & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge ((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } 1 \wedge \beta \approx \beta \\ \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.