Klausur am 29.03.2014:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

[*12 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & a+2b \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu beweisen brauchen). Bestimmen Sie Kern(f) und Basen von Kern(f) und Bild(f).

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}\, , f(x) = \ln(x)e^{-x}$, genau ein lokales Maximum in $(0, \infty)$ hat.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)}$$

existiert, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{n} x^n$$

konvergiert, d.h. bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R und begründen Sie, ob für $x = -R$ und $x = R$ Konvergenz oder Divergenz vorliegt. Konvergiert die Reihe für $x = -\frac{1}{2}$ bzw. für $x = \frac{1}{3}$?

[*8 + 2 = 10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx \; .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Die Formel α sei durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	C	α
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Bestimmen Sie eine disjunktive und eine konjunktive Normalform von α; geben Sie vorgenommene Äquivalenzumformungen jeweils an. Zusatzfrage (die die Arbeit auch vereinfachen kann!): Finden Sie eine DNF mit nur zwei Monomen?

[*10 + 2 = 12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$