FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

Lehrgebiet Algebra
Prof. Dr. Luise Unger

FernUniversität in Hagen • 58084 Hagen

Klausurinformationen
für unsere
Studentinnen und Studenten

Ihr Zeichen:
Ihre Nachricht vom:

Mein Zeichen:
Meine Nachricht vom:

Auskunft erteilt:
Telefon: +49 2331 987-2287
Telefax:
E-Mail: 1141@fernuni-hagen.de
Hausanschrift: Universitätsstr. 1
D – 58097 Hagen

Datum: 15.9.2017

Klausur zum Kurs 01141 „Mathematische Grundlagen" im SoSe 2017

Liebe Fernstudentin, lieber Fernstudent,

beiliegend finden Sie Ihre Klausur, eine Teilnahmebestätigung und gegebenenfalls einen Leistungsnachweis zum Kurs

01141 „Mathematische Grundlagen".

Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie die Note 4,0 oder besser erreicht haben.

Herzlichen Glückwunsch allen, die bestanden haben!

Zu Ihrer Information hier die Klausurstatistik: 237 Klausuren sind bisher eingegangen.

$\geq$ 58 Punkte	49 bis 57 Punkte	40 bis 48 Punkte	32 bis 39 Punkte	0 bis 31 Punkte
Note: sehr gut	Note: gut	Note: befriedigend	Note: ausreichend	Note: mangelhaft
27 Studierende	21 Studierende	42 Studierende	51 Studierende	96 Studierende.

Die Klausur und eine Musterlösung finden Sie im virtuellen Studienplatz des Sommersemesters 2016 unter „Alte Klausuren".

Mit freundlichen Grüßen, Ihr Betreuungsteam

Anlage(n): Klausur
Teilnahmebestätigung
ggf. Leistungsnachweis

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2017

Klausur am 09.09.2017:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen begründet werden.

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 e^{-x}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(n(n-1) - 2nx + x^2\right) e^{-x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist mit $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f gemeint. Sie müssen nicht zeigen, dass diese existiert.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a) die Treppennormalform von A.

(b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto Ax$ nicht bijektiv ist.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Sei

$$U_f = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $U_f \cap \mathrm{Kern}(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ gilt.

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Seien $v, w \in V$ mit $v, w \neq 0$. Weiter gebe es $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq \mu$ so dass $f(v) = \lambda v$ und $f(w) = \mu w$ gilt. Zeigen Sie, dass v und w linear unabhängig sind.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen sind nach unten bzw. oben beschränkt, welche besitzen ein Minimum oder ein Maximum?

(a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 > 0\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| - 1 < 0\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 \leq 1\}$

[*2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte*]

Aufgabe 6

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_m < a_n$ für alle $n \geq n_0$ gibt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Welche der beiden folgenden Reihen konvergieren?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^{n+1}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 8

(a) Stellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel

$$((P \to Q) \wedge (R \vee Q)) \to (P \wedge Q)$$

auf. Ist die Formel erfüllbar?

(b) Sind die Formeln

$$(P \wedge ((Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R))) \vee (R \wedge Q) \text{ und } (P \vee R) \wedge Q$$

logisch äquivalent?

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$