Aufgabe 1

Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt

$$2 \cdot 4 + 1 = 9 \leq 4^2 = 16 = 2^4,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 4$ gilt $2n + 1 \leq n^2 \leq 2^n$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist $2(n + 1) + 1 \leq (n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Es ist

$$\begin{aligned} 2(n+1)+1 = 2n+3 = 2n+1+2 &\leq n^2 + 2 \qquad \text{(mit Induktionsannahme)} \\ &\leq n^2 + 2 + (2n-1) \qquad \text{(da } n \geq 4 \text{ ist } 2n-1 \geq 0) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \end{aligned}$$

also ist $2(n + 1) + 1 \leq (n + 1)^2$. Weiter ist

$$\begin{aligned} (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 &\leq 2^n + 2n + 1 \qquad \text{(mit Induktionsannahme)} \\ &\leq 2^n + 2^n \qquad \text{(wieder mit Induktionsannahme } 2n+1 \leq 2^n) \\ &= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}, \end{aligned}$$

also ist $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$ und insgesamt $2(n + 1) + 1 \leq (n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 2

(a) Die Menge U_1 ist kein Unterraum von $M_{22}(\mathbb{Q})$. Es sind nämlich zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in U_1$, aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \notin U_1.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_1 kein Unterraum sein kann.

(b) U_2 ist ein Unterraum von $M_{22}(\mathbb{Q})$, was wir mit dem Unterraumkriterium zeigen werden. Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U_2$. Seien weiter $\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in U_2$ und sei $s \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix} \in U_2$$

und

$$s \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa & 0 \\ -sa & 0 \end{pmatrix} \in U_2.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_2 ein Unterraum ist.

(c) U_3 ist kein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$, denn $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U_3$.

Aufgabe 3

(a) Wir überführen A in Treppennormalform. Dazu addieren wir das 2-fache der ersten Zeile zur zweiten und die erste Zeile zur dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss wird noch die zweite Zeile von der ersten subtrahiert und das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Treppennormalform von A. Um die Lösungsmenge von Ax=0 zu ermitteln, streichen wir nun in der Treppennormalform die Nullzeile und füllen dann so mit Nullzeilen auf, dass die Matrix quadratisch ist und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ersetzen wir die Nullen auf der Diagonalem durch -1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und lesen die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ bzw. eine Basis der Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

mit Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Die Basis $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ von $\mathcal{L}$ kann zum Beispiel durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden. Wir zeigen, dass die 4 Vektoren linear unabhängig sind. Dazu seinen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$a+c=0, a=0, b=0, -b+d=0$$

und damit auch $a=b=c=d=0$. Also sind die 4 Vektoren linear unabhängig und, da 4 linear unabhängige Vektoren in einem 4-dimensionalen Raum eine Basis bilden, auch eine Basis.

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ können durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis ergänzt werden.

(c) Es ist $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$ und $\mathcal{C} = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$. Dann ist

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Also ist

$${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&-2&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ linear.

Sei zunächst $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ und $v \in \mathrm{Kern}(f \circ f)$. Dann ist $f(f(v)) = 0$, also $f(v) \in \mathrm{Kern}(f)$. Außerdem ist natürlich $f(v) \in$ Bild(f) und damit $f(v) \in \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$. Es folgt $f(v) = 0$, also $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Damit ist gezeigt, dass $\mathrm{Kern}(f \circ f) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$ gilt. Es gilt aber auch $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(f \circ f)$, denn für $v \in \mathrm{Kern}(f)$ gilt $f(v) = 0$, also auch $f(f(v)) = 0$. Also ist $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$.

Nun nehmen wir an, dass $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$ gilt und müssen $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ zeigen. Sei also $v \in \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f)$. Da $v \in \mathrm{Bild}(f)$, gibt es ein $w \in V$ mit $v = f(w)$. Da $v \in \mathrm{Kern}(f)$, gilt $f(v) = 0$ und damit auch $f(f(w)) = 0$. Also ist $w \in \mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$. Es folgt $v = f(w) = 0$. Damit ist gezeigt, dass $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 5

Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn a_n ist ein Produkt, bei dem jeder Faktor größer als 0 ist. Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) b_{n+1} = a_n b_{n+1} < a_n,$$

denn $a_n, b_{n+1} > 0$ und $b_{n+1} < 1$. Also ist die Folge monoton fallend. Damit ist sie auch nach oben beschränkt, zum Beispiel durch $a_1 = b_1$. Da die Folge monoton und beschränkt ist, ist sie konvergent.

Aufgabe 6

Sei $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ für alle $x \in D$.

(a) Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Weiter ist mit der Ketten- und Quotientenregel

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{2 - x^2} - x\left(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}\right)}{(\sqrt{2 - x^2})^2} = -\frac{\sqrt{2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(\sqrt{2 - x^2})^2} = -\frac{\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(\sqrt{2 - x^2})^2} = -\frac{2}{(\sqrt{2 - x^2})^3}$$

für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Hat f ein lokalen Extremum bei $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, dann gilt $f'(x) = 0$, also $-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 0$. Das ist nur für $x = 0$ erfüllt. Da $f''(0) = -\frac{2}{\sqrt{2}^3} < 0$ gilt, liegt bei $x = 0$ ein lokales Maximum vor. Nun müssen noch die Randwerte $x = -\sqrt{2}$ und $x = \sqrt{2}$ betrachtet werden. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$. Also liegt bei beiden Punkten ein lokales Minimum vor.

(c) Für das zweite Taylorpolynom von f in $x_0 = 1$ gilt

$$P_{2,1}(x) = \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 1 - (x-1) - (x-1)^2.$$

Aufgabe 7

(a) Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^7 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^7}{n^7} = 2^7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$ laut Studienbrief konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^7$.

(b) Die Reihe konvergiert nicht, denn $(\sqrt{3+n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.

(c) Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\frac{n!}{3(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n-1)!}{3n^n}} &= \frac{n!n^n}{(n-1)!(n+1)^{n+1}} = \frac{n\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \\ &= (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-(n+1)} = e^{-1} < 1$ konvergiert die Reihe.

Aufgabe 8

Wir formen beide Formeln so lange mit Hilfe der Äquivalenzregeln um, bis die Negationszeichen direkt vor den Atomen bzw. Primformeln stehen.

(a)

$$\begin{aligned}\neg((A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)) &\approx \neg(A\vee B)\vee\neg(\neg B\vee C) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx (\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg\neg B\wedge\neg C) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx (\neg A\wedge\neg B)\vee(B\wedge\neg C) && \text{(Negationsregel)},\end{aligned}$$

und die letzte Formel ist in Negationsnormalform.

(b)

$$\begin{aligned}\neg(\forall x\exists y(R(x,y)\wedge(\neg Q(y)))) &\approx \exists x(\neg(\exists y(R(x,y)\wedge(\neg Q(y))))) && \text{(Quantorwechsel)}\\ &\approx \exists x\forall y(\neg(R(x,y)\wedge(\neg Q(y)))) && \text{(Quantorwechsel)}\\ &\approx \exists x\forall y(\neg R(x,y)\vee\neg\neg Q(y)) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx \exists x\forall y(\neg R(x,y)\vee Q(y)) && \text{(Negationsregel)},\end{aligned}$$

und diese Formel ist in Negationsnormalform.