Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2015

Klausur am 26.09.2015:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

Für $n = 1$ gilt $(1+a)^1 = 1+a) \leq 1+(2^1-1)a = 1+a$. Es gilt somit der Induktionsanfang.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass $(1+a)^n \leq 1+(2^n-1)a$ für ein $n \geq 1$ gilt. Im Induktionsschritt müssen wir zeigen, dass daraus $(1+a)^{n+1} \leq 1+(2^{n+1}-1)a$ folgt.

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \\
&\leq (1+a)(1+(2^n-1)a) \text{ mit der Induktionsvoraussetzung} \\
&= 1+(2^n-1)a+a+(2^n-1)a^2 \text{ ausmultiplizieren} \\
&= 1+(2^n-1+1+(2^n-1)a)a \text{ ausklammern} \\
&= 1+(2^n+(2^n-1)a)a \\
&\leq 1+(2^n+(2^n-1))a, \text{ denn } 0 \leq a \leq 1 \\
&= 1+(2^{n+1}-1)a.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

Aufgabe 2

Der Kern von f besteht aus allen Vektoren $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = 0$, ist also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dies bestimmen mit Hilfe des Gaußalgorithmus. Dazu überführen wir A in Treppennormalform.

Es ist $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir subtrahieren die erste Zeile von der zweiten, addieren die erste Zeile zur dritten und subtrahieren das 3-Fache der ersten Zeile von der vierten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die letzten vier Zeilen sind Vielfache voneinander, wir können also die letzten drei Zeilen durch Nullzeilen ersetzen. Wir teilen die zweite Zeile noch durch 2 und erhalten

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir die zweite Zeile zur ersten und teilen dann die erste Zeile durch -2 und die zweite durch 2. Das Ergebnis ist die Treppennormalform T zu A, also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir streichen die Nullzeilen und fügen neue Nullzeilen so ein, dass die Pivot-Einsen in T auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir fügen -1 dort auf der Diagonalen ein, wo 0 steht:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten, in denen wir -1 eingefügt haben, bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(f)$. Die Spalten sind auch linear unabhängig, bilden daher eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Es ist also $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

Zur Berechnung einer Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ verwenden wir zunächst den Rangsatz. Es ist $\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$, also $5 = 3 + \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Es folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$. Es reicht also, zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathrm{Bild}(f)$ zu finden. Wenn wir die A mit den Vektoren der Standardbasis $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ von $\mathbb{R}^5$ multiplizieren, erhalten wir mit Ae_i gerade die i-te Spalte von A, also $Ae_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ae_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$Ae_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Ae_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Vektoren Ae_1 und Ae_3 sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander, und sie liegen in $\mathrm{Bild}(f)$. Sie bilden daher eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 3

Seien U, V, W und u, w wie in der Aufgabenstellung, und sei $U \cap W = \{0\}$. Seien $a, b \in \mathbb{K}$ mit $au + bw = 0$. Ist $a \neq 0$, so folgt $u = \frac{b}{a}w$, und damit $u \in W$. Dann gilt $u \in U \cap W$, und $u \neq 0$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $U \cap W = \{0\}$ ist, und es folgt daher $a = 0$. Da $0u = 0$ ist, folgt $bw = 0$. Da $w \neq 0$ ist, kann diese Gleichung nur für $b = 0$ erfüllt sein. Wir haben also gezeigt, dass $a = b = 0$ ist, und dies bedeutet, dass u und w linear unabhängig sind.

Aufgabe 4

Es ist $f'(x) = 1 - 2\sin(x)$. Aus der Bedingung $f'(x) = 0$, also $\sin(x) = \frac{1}{2}$, folgt, dass mögliche Minima und Maxima für $x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ beziehungsweise $y_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vorliegen. Die Funktion f' ist differenzierbar, und es gilt $f''(x) = -2\cos x$. Es ist $f''(x_k) = -2\cos(\frac{\pi}{6}) < 0$ und $f''(y_k) = -2\cos(\frac{5\pi}{6}) > 0$. Damit liegt bei x_k, $k \in \mathbb{Z}$, ein lokales Maximum vor, und bei y_k, $k \in \mathbb{Z}$, ein lokales Minimum.

Aufgabe 5

Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt f irgendwo (möglicherweise mehrfach) in $[a, b]$ ihr Maximum an.

1. Bedingung (ii) ist äquivalent mit: Für jedes $y \in (a, b]$ gilt $f(y) \leq f(a)$. Für $y = a$ gilt ebenfalls $f(a) \leq f(a)$, also gilt für alle $y \in [a, b]$, dass $f(y) \leq f(a)$, d.h. a ist eine Maximalstelle von f.

2. Sei $c \in (a, b)$; nach Bedingung (i) gibt es dann ein $y \in (c, b]$ mit $f(y) > f(c)$, also ist c keine Maximalstelle von f.

3. Wir wissen bereits, dass a eine Maximalstelle von f ist, und müssen nun noch zeigen, dass $f(b) = f(a)$ gilt. Wir nehmen an, das sei nicht der Fall, dass also $f(a) > f(b)$; dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in (a, b)$ mit $f(a) > f(c) > f(b)$. Wir betrachten die Menge $A = \{x \in (a, b) | f(x) = f(c)\}$; sei $x_1 = \sup A$. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann auch $f(x_1) = f(c)$ (dazu können wir eine beliebige Folge betrachten, die in A gegen x_1 konvergiert). Daraus folgt, dass $a < x_1 < b$ ist ($x_1 = b$ kann wegen $f(x_1) = f(c) > f(b)$ nicht eintreten). Nach Bedingung (i) gibt es dann ein $y \in (x_1, b]$ mit $f(y) > f(x_1) > f(b)$, und erneut nach dem Zwischenwertsatz muss in (y, b) (also rechts von x_1!) ein weiteres x_2 mit $f(x_2) = f(x_1)$ liegen – im Widerspruch dazu, dass $x_1 = \sup A$ war. Also war unsere Annahme falsch, d.h. es gilt $f(b) = f(a)$. (Direkt mit a an Stelle von c zu argumentieren, funktioniert nicht – es könnte $A = \{a\}$ sein, und Bedingung (i) wäre nicht anwendbar!)

Aufgabe 6

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ divergiert, wie wir mit dem Quotientenkriterium zeigen werden. Sei $a_n = \frac{n^n}{2^n n!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)^n 2^n n!}{2\cdot 2^n (n+1) n! n^n} = \frac{(n+1)^n}{2n^n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

   Die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ konvergiert somit gegen $\frac{e}{2}$. Somit sind fast alle $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, und das Quotientenkriterium zeigt, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ divergent ist.

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$ divergiert ebenfalls. Zum Beweis verwenden wir das Wurzelkriterium.Sei $a_n = (1+\frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$. Für gerade Indizes ist $\sqrt[n]{|a_n|} = (1+\frac{1}{n})^n$. Die Teilfolge $(\sqrt[2n]{|a_{2n}|})$ konvergiert somit gegen $e > 1$. Damit sind unendlich viele Glieder der Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ größer als 1. Mit dem Wurzelkriterium folgt die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 7

1. In der Formel $\forall x P(x) \to P(y)$ ist x gebunden und y frei.
2. In der Formel $\forall x P(x) \to Q(x,y)$ ist x in $P(x)$ gebunden. In $Q(x,y)$ sind x und y frei.
3. In der Formel $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$ ist x in $P(x)$ gebunden. In $Q(x,y)$ ist x gebunden und y frei.
4. In der Formel $Q(x,y) \to \exists y P(x)$ sind alle Variablensymbole frei.