Klausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Klausur am 32.12.2007:

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

zu Aufgabe 1

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \mid & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & \mid & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mid & 2 \end{pmatrix}$. Um diese Matrix in Treppennormalform zu überführen, subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und die erste Zeile von der dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \mid & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \mid & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \mid & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mid & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren das Doppelte der vierten Zeile zur zweiten und die vierte Zeile zur dritten. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \mid & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mid & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen die zweite und die vierte Zeile und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \mid & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die zweite Zeile von der ersten und die dritte Zeile von der zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \mid & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.

2. In $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ streichen wir die Nullzeile und fügen eine Nullzeile so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch ist und die Pivot-Positionen auf der Diagonalen stehen. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

In $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ersetzen wir die Null auf der Diagonalen durch -1 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist dann

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

zu Aufgabe 2

1. Seien $a + bT + cT^2$ und $a' + b'T + c'T^2$ in V. Dann gilt

$$\begin{aligned} f((a + bT + cT^2) + (a' + b'T + c'T^2)) &= f((a + a') + (b + b')T + (c + c')T^2) \\ &= (a + a' + c + c') + (b + b')T^2 \\ &= (a + c) + bT^2 + (a' + c') + b'T^2 \\ &= f(a + bT + cT^2) + f(a' + b'T + c'T^2). \end{aligned}$$

Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $a + bT + cT^2 \in V$.Dann gilt

$$\begin{aligned} f(r(a+bT+cT^2)) &= f(ra+rbT+rcT^2) \\ &= (ra+rc)+rbT^2 \\ &= r((a+c)+bT^2) \\ &= rf(a+bT+cT^2). \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Als Basis $\mathcal{B}$ wählen wir die Standardbasis, also $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 &&= 1\cdot 1 + 0\cdot T + 0\cdot T^2, \\ f(T) &= T^2 &&= 0\cdot 1 + 0\cdot T + 1\cdot T^2, \\ f(T^2) &= 1 &&= 1\cdot 1 + 0\cdot T + 0\cdot T^2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten schreiben wir als Spalten in eine Matrix und erhalten

$$ {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

3. Es ist $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) = 2$.

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

   Das Nullpolynom liegt in U, denn es ist von der Form $2a + 3b + bT + aT^2$, mit $a = b = 0$.

   Seien $2a+3b+bT+aT^2$ und $2a'+3b'+b'T+a'T^2$ in U. Dann gilt $(2a+3b+bT+aT^2)+(2a'+3b'+b'T+a'T^2) = 2(a+a')+3(b+b')+(b+b')T+(a+a')T^2 \in U$.

   Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$, und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt $r(2a + 3b + bT + aT^2) = 2ra + 3rb + rbT + raT^2 \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.

2. Die Polynome $2+T^2$ und $3+T$ liegen in U. Wir zeigen, dass $(2+T^2, 3+T)$ eine Basis von U ist.

   Erzeugendensystem: Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$. Dann gilt

   $$2a + 3b + bT + aT^2 = a(2 + T^2) + b(3 + T),$$

   und es folgt, dass $(2 + T^2, 3 + T)$ ein Erzeugendensystem von U ist.

Lineare Unabhängigkeit: Die beiden Polynome $2 + T^2$ und $3 + T$ sind keine Vielfachen voneinander. Es folgt, dass sie linear unabhängig sind.

Da die Polynome in U liegen, ein Erzeugendensystem von U bilden und linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U.

zu Aufgabe 4

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{1}(4i-3) = 4-3 = 1$ und $1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1$. Es gilt also der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Sei $n \geq 1$ und $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(4i-3) &= \sum_{i=1}^{n}(4i-3) + 4(n+1) - 3 \\
&= n(2n-1) + 4n + 1 \\
&= 2n^2 + 3n + 1 \\
&= (n+1)(2n+1) \\
&= (n+1)(2(n+1)-1).
\end{aligned}$$

Wir haben also die Aussage „Wenn $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$, so folgt $\sum_{i=1}^{n+1}(4i-3) = (n+1)(2(n+1)-1)$" bewiesen, und mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

zu Aufgabe 5

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ ist. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$, und somit $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, denn die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend. Für alle $n \geq n_0$ erhalten wir somit die Abschätzung

$$|\sqrt{n} - \sqrt{n-1}| = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Es folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

zu Aufgabe 6

1. Wir beweisen die Konvergenz mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n = (\frac{3}{4} + \frac{1}{n})^n$. Für alle $n > 8$ gilt
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{4} + \frac{1}{n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1.$$
Für fast alle a_n gilt somit $\sqrt[n]{a_n} < \frac{7}{8} < 1$. Mit dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

2. Wir beweisen die Konvergenz mit dem Leibniz-Kriterium. Sei $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$. Dann gilt
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = b_{n+1},$$
denn $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$. Somit ist (b_n) streng monoton fallend. Weiter gilt für alle $n \geq 1$
$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Da $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine Nullfolge ist (Beweis wie in Aufgabe 5), ist (b_n) eine Nullfolge. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

3. Wir beweisen die Behauptung mit dem Quotientenkriterium. Sei $a_n = \frac{n^2}{3^n}$. Dann gilt
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}).$$
Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \frac{1}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

zu Aufgabe 7

Für $x \in \{-1, 1\}$ ist f nicht definiert. Sei $x \notin \{-1, 1\}$. Es ist $\tan(\frac{\pi x}{x^2-1}) = \frac{\sin(\frac{\pi x}{x^2-1})}{\cos(\frac{\pi x}{x^2-1})}$. Dieser Ausdruck ist genau dann nicht definiert, wenn der Nenner 0 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{\pi x}{x^2-1} \in \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist.

Es gilt
$$\begin{aligned}
& \tfrac{\pi x}{x^2-1} \in \{(k+\tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{x}{x^2-1} = k + \tfrac{1}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{x}{x^2-1} = \tfrac{2k+1}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 1 = \tfrac{2}{2k+1}x \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - \tfrac{2}{2k+1}x - 1 = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x = \tfrac{1 \pm \sqrt{4k^2+4k+2}}{2k+1} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, \frac{1 \pm \sqrt{4k^2+4k+2}}{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert ist.

Die Funktion ist überall dort, wo sie definiert ist, stetig, denn sie ist die Komposition der stetigen Funktionen $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto \frac{\pi x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

zu Aufgabe 8

Die gegebene Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich zweimal differenzierbar. Ihre Ableitungen sind

$$f'(x) = (nx^{n-1} - x^n)\exp(-x) \text{ und } f''(x) = (n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n)\exp(-x).$$

Nullstellen hat f' in $x_0 \in \{0, n\}$. In $x_0 = n$ ist

$$f''(n) = (n(n-1)n^{n-2} - 2nn^{n-1} + n^n)\exp(-n) = -n^{n-1}\exp(-n) < 0,$$

sodass hier ein lokales Maximum vorliegt.