Probeklausur Mathematische Grundlagen (1141) WS 07/08

Klausur am 32. Dezember 2007:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Sei $f : V \to V$ definiert durch $f(a + bT + cT^2) = (a + c) + bT^2$ für alle $a + bT + cT^2 \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Wählen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V und berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(f)$.

[*4 + 4 + 2 = 10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $U = \{2a + 3b + bT + aT^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[T]$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*6 + 8 = 14 Punkte*]

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel gilt.

$$\sum_{i=1}^{n} (4i - 3) = n(2n - 1)$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass folgende Reihen konvergent sind.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4} + \frac{1}{n})^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

[*4 + 4 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ für die durch $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{x^2-1})$ gegebene Funktion an. In welchen Punkten ist f stetig?

Hinweis: Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$ sind $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n \exp(-x)$.

Beweisen Sie, dass f in $x_0 = n$ ein lokales Maximum hat.

[*8 Punkte*]