Mathematische Grundlagen (01141) **WS 2011/12**

Klausur am 24.03.2012:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Suchen Sie die kleinste natürliche Zahl, für die die Ungleichung $4n + 3 \leq 2^n$ gilt, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Ungleichung auch für alle natürlichen Zahlen, die größer sind als diese, erfüllt ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von λ) die Treppennormalform von A_λ.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von V.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ diejenige Abbildung, die jeder Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix $f(A) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{pmatrix}$ zuordnet.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*3 + 7 = 10 Punkte*]

© FernUniversität in Hagen, 2012

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die durch

$$a_1 = 8\ , \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge konvergiert. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.
(Hinweis: Monotonieprinzip, vollständige Induktion.)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx\ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$$

konvergiert, d.h. bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R und begründen Sie, ob für $x = -R$ und $x = R$ Konvergenz oder Divergenz vorliegt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = xe^{-x}$. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \vee B) \to (C \vee D)\ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*8 Punkte*]

© FernUniversität in Hagen, 2012

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)} a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

© FernUniversität in Hagen, 2012