Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2009

Klausur am 29.08.2009:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Im Induktionsanfang sei $n_0 = 0$. Dann gilt $\sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10 \cdot 11}$ und $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{10 \cdot 11}$. Somit gilt der Induktionsanfang.

Die Induktionsvoraussetzung ist, dass für ein $n \geq 0$ die Formel $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{n+11}$ gilt.

Wir müssen zeigen, dass daraus $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{(n+1)+11} = \frac{1}{10} + \frac{1}{n+12}$ folgt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+10)(k+11)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)}\right) + \frac{1}{((n+1)+10)((n+1)+11)} \\
&= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{n+11}\right) + \frac{1}{(n+11)(n+12)} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{n+12}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Durch die elementaren Zeilenumformungen: Addition der zweiten Zeile zur ersten und Subtraktion der zweiten Zeile von der vierten geht A über in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Addition der ersten zur dritten Zeile und Subtraktion der vierten Zeile von der dadurch erhaltenen dritten ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Vertauschung der zweiten und vierten Zeile und danach Vertauschung der dritten und vierten Zeile erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch die Umformungen: Multiplikation der vierten Zeile mit $\frac{1}{2}$ und danach Subtraktion der vierten Zeile von der ersten Zeile erhält man die Einheitsmatrix I_4.

Die Treppennormalform von A ist also die Einheitsmatrix I_4 und damit gilt $\mathrm{Rg}(A) = 4$.

Aufgabe 3

1. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(A + A') &= f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ &= (a+a'+b+b') + (a+a'+b+b')T + (a+a'+b+b'+c+c'+d+d')T^2 \\ &= (a+b) + (a+b)T + (a+b+c+d)T^2 \\ &\quad +(a'+b') + (a'+b')T + (a'+b'+c'+d')T^2 \\ &= f(A) + f(A'). \end{aligned}$$

Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(rA) &= f\begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} \\ &= (ra+rb) + (ra+rb)T + (ra+rb+rc+rd)T^2 \\ &= r((a+b) + (a+b)T + (a+b+c+d)T^2) \\ &= rf(A). \end{aligned}$$

Somit ist f linear.

2. Sei $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Wir bilden $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + T + T^2$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + T + T^2$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^2$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^2$.

Da $\left(f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ ist, und da $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten, folgt, dass $(1 + T + T^2, T^2)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$ ist. Die Polynome $1 + T + T^2$ und T^2 sind keine Vielfachen voneinander, sie sind also linear unabhängig. Somit ist $(1 + T + T^2, T^2)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 4

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium.

Die Nullmatrix liegt in V, denn $0X_0 = 0$.

Seien $A, B \in V$. Dann gilt $(A+B)X_0 = AX_0 + BX_0 = 0 + 0 = 0$, also $A + B \in V$.

Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $A \in V$. Dann gilt $aAX_0 = a0 = 0$, also $aA \in V$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

Die Funktion f ist auf dem Intervall $[1, e]$ stetig. Es gilt $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 > 0$ und $f(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano gibt es ein $x_0 \in (1, e)$, sodass $f(x_0) = 0$ ist. Somit gibt es mindestens eine Nullstelle von f in $[1, e]$. Die Funktion f ist auch differenzierbar, und es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für alle $x \in [1, e]$. Somit ist f im Intervall $[1, e]$ streng monoton fallend und stetig. Es folgt, dass f höchstens eine Nullstelle in $[1, e]$ besitzt. Zusammen folgt, dass f genau eine Nullstelle in $[1, e]$ besitzt.

Aufgabe 6

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar; daher genügt es, diejenigen Stellen x mit $f'(x) = 0$ zu betrachten. Es gilt

$$f'(x) = (4x - 1)\exp(-x) - (2x^2 - x - 1)\exp(-x) = (-2x^2 + 5x)\exp(-x).$$

Da $\exp(-x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, folgt, dass $f'(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $-2x^2 + 5x = (-2x + 5)x = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $x = \frac{5}{2}$ ist.

Die Funktion f' ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f''(x) = (-4x + 5)\exp(-x) - (-2x^2 + 5x)\exp(-x) = (2x^2 - 9x + 5)\exp(-x).$$

Es ist $f''(0) = 5\exp(-x) > 0$ und $f''(\frac{5}{2}) = -5\exp(-x) < 0$. Somit hat f bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \frac{5}{2}$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 7

Die Reihe ist sogar absolut konvergent, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{(n+1)^2(-2)^{-n-1}}{n^2(-2)^{-n}} \right| = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 .$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2} < 1$, folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergent ist.

Aufgabe 8

Zunächst übersetzen wir die Umgangssprache in die Sprache der Aussagenlogik. Dabei verwenden wir folgende Abkürzungen:

p: P ist schuldig.

q: Q ist schuldig.

r: R ist schuldig.

Die Vorermittlungen der Kommissarin ergeben damit:

1. $q \vee r \to \neg p$
2. $\neg p \vee \neg r \to q$
3. $r \to p$

Diese Aussagen müssen wir mit $\wedge$ verknüpfen und überprüfen, unter welchen Voraussetzungen an p, q und r sie sich als wahr herausstellt.

Wir berechnen die Wahrheitstafel für $(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$, wobei wir diese allerdings nur so weit ausfüllen, bis klar ist, was der Wahrheitswert von $(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$ ist.

p	q	r	$q \vee r \to \neg p$	$\neg p \vee \neg r \to q$	$r \to p$	$(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$
1	**1**	**1**	**0**			**0**
1	**0**	**1**	**0**			**0**
1	**1**	**0**	**0**			**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**		**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**

Damit ist der Fall eindeutig gelöst: Q ist schuldig und P und R sind unschuldig. Andere Möglichkeiten kann es nicht geben.

Aufgabe 9

1. Wir zeigen, dass die Folge monoton fallend und beschränkt ist.
   - **Monotonie:** Wir zeigen mit Induktion, dass $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann gilt $a_2 = \sqrt{88 + 12} = 10 < 88 = a_1$. Der Induktionsanfang ist somit richtig. Die Induktionsannahme ist, dass $a_{n+1} < a_n$ für ein $n \geq 1$ gilt. Dann gilt $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + 12} < \sqrt{a_n + 12} = a_{n+1}$, denn die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend.
   - **Beschränkt:** Von oben ist (a_n) durch $a_1 = 88$ beschränkt, denn die Folge ist monoton fallend. Wir zeigen mit Induktion, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 88 > 0$, es gilt also der Induktionsanfang. Die Induktionsannahme ist, dass $a_n > 0$ für ein $n \geq 1$ ist. Dann gilt $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12} > \sqrt{12} > 0$. Es folgt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

2. Im ersten Teil der Aufgabe haben wir gezeigt, dass (a_n) konvergent ist. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, und es folgt

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 12}^2 = \lim_{n\to\infty} (a_n + 12) = a + 12,$$

also $a^2 - a - 12 = 0$. Es folgt $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 48}$, also $a = 4$ oder $a = -3$. Da der Grenzwert nicht negativ sein kann, denn alle Folgenglieder sind positiv, folgt, dass $a = 4$ ist.