Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2012

Klausur am 22.09.2012:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach n. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{2n_0-1}(-1)^{k+1}k^2 = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1 = 1 \cdot (2-1) = n_0(2n_0-1).$$

Somit gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 = n(2n-1)$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $\sum_{k=1}^{2(n+1)-1}(-1)^{k+1}k^2 = (n+1)(2(n+1)-1)$, also $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k^2 = (n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$ ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k^2 &= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{2n+1}(2n)^2 + (-1)^{2n+2}(2n+1)^2 \\
&\quad \text{(Abspalten der letzten beiden Summanden)} \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2 \\
&\quad \text{(denn } 2n+1 \text{ ist ungerade und } 2n+2 \text{ ist gerade)} \\
&= n(2n-1) - 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 \text{ (Induktionsannahme und Ausmultiplizieren)} \\
&= 2n^2+3n+1 = (n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & | & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die erste Zeile von der dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

und die zweite von der vierten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Wir addieren die dritte Zeile zur vierten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nun addieren wir das Doppelte der dritten Zeile zur ersten und zur zweiten Zeile, multiplizieren die dritte Zeile mit -1 und erhalten die Treppennormalform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir fügen Nullzeilen und -1'en ein und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Von dieser Matrix lesen wir die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3

Um zu zeigen, dass U ein Unterraum von $C[a, b]$ ist, benutzen wir das Unterraumkriterium. Für $\hat{0}$, das Nullelement von $C[a, b]$, gilt $\int\limits_a^b \hat{0} dx = 0$, also gilt $\hat{0} \in U$. Seien weiter $f, g \in U$, also $\int\limits_a^b f(x)dx = 0 = \int\limits_a^b g(x)dx$. Dann ist $\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx = 0 + 0 = 0$. Also folgt $f + g \in U$. Sei nun $f \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\int\limits_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda f \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $C[a, b]$ ist.

Aufgabe 4

Da v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, gibt es $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0, \text{ also } -\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

und nicht alle drei Körperelemente α, β, γ sind 0. Angenommen, es gilt $\gamma = 0$. Dann wäre $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, und mindestens eins der Körperelemente α, β ist ungleich 0. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Es gilt also $\gamma \neq 0$, und die Gleichung $-\gamma v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ kann durch $-\gamma$ geteilt werden. Es folgt $v_3 = -\frac{\alpha}{\gamma} v_1 + (-\frac{\beta}{\gamma}) v_2$, und mit $a = -\frac{\alpha}{\gamma}$ und $b = -\frac{\beta}{\gamma}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

1. Sei $p = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 \in V$ mit $f(p) = (a_0, -a_1, a_2, a_0 + a_1 + a_2) = (0,0,0,0)$. Ein Vergleich der ersten drei Komponenten liefert sofort, dass $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, also $p = 0$, gilt. Damit ist $\text{Kern}(f) = \{0\}$ mit Basis $\emptyset$.

   Da $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt, ist f injektiv. Also werden linear unabhängige Vektoren aus V auf linear unabhängige Vektoren in $M_{14}(\mathbb{R})$ abgebildet. Die Bilder der kanonischen Basis $(1, T, T^2)$ sind dann also linear unabhängig. Da sie außerdem ein Erzeugendensystem von $\text{Bild}(f)$ bilden, sind sie eine Basis von $\text{Bild}(f)$. Also ist

   $$f(1) = (1,0,0,1), f(T) = (0,-1,0,1), f(T^2) = (0,0,1,1)$$

   eine Basis von $\text{Bild}(f)$.

2. Wir berechnen

   $$\begin{aligned} f(1) &= (1,0,0,1) = 1 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1) \\ f(T) &= (0,-1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1) \\ f(T^2) &= (0,0,1,1) = 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,0,1). \end{aligned}$$

   Also gilt

   $$_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Wir verwenden das Monotonieprinzip. Wir wissen schon, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Damit ist (a_n) durch 0 nach unten beschränkt. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{(1+a_n)a_n} = \frac{1}{1+a_n} < 1.$$

Es folgt, dass (a_n) monoton fallend ist. Damit ist (a_n) durch a_1 nach oben beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip gilt, dass (a_n) konvergent ist.

Aufgabe 7

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2}$ ist zwar alternierend, aber die Folge $(b_n) = (\frac{n+(-1)^n}{n^2})$ ist nicht monoton fallend, wie wir jetzt zeigen werden.

   Dazu reicht es, die ersten Folgeglieder von (b_n) auszurechnen: Es sind $b_1 = \frac{1+(-1)}{1} = 0$, $b_2 = \frac{2+(-1)^2}{4} = \frac{3}{4}$, $b_3 = \frac{3+(-1)^3}{9} = \frac{2}{9}$ und $b_4 = \frac{4+(-1)^4}{16} = \frac{5}{16}$. Es sind $b_1 < b_2$ (schon dies zeigt, dass (b_n) nicht monoton fallend ist), $b_2 > b_3$ und $b_3 < b_4$. Die Folge (b_n) ist daher nicht monoton fallend.

   Man kann sogar zeigen (musste man hier aber nicht), dass es unendlich viele Stellen der Folge gibt, an denen sie nicht monoton fällt. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade.

   $$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \tfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \tfrac{n+(-1)^n}{n^2} \\ &= \tfrac{n+2}{(n+1)^2} - \tfrac{n-1}{n^2} \\ &= \tfrac{n^2(n+2)-(n+1)^2(n-1)}{n^2(n+1)^2} \\ &= \tfrac{n^3-2n^2-n^3-2n^2-n+n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \tfrac{n^2+n+1}{n^2(n+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

   Ist n also ungerade, dann ist $b_{n+1} > b_n$. Somit ist die Folge (b_n) nicht monoton fallend.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

   $$(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2} = (-1)^n\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = (-1)^n\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

   Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ ist als Negative der alternierenden geometrischen Reihe konvergent, und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist ebenfalls konvergent. Daher konvergiert die Summe dieser Reihen, also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2}$.

Aufgabe 8

Es ist $\exp(x)(y-x) < \exp(y) - \exp(x) < \exp(y)(y-x)$ genau dann, wenn $\exp(x) < \frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} < \exp(y)$ gilt.

Da die Exponentialfunktion überall stetig und überall differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz auf die Exponentialfunktion im Intervall $[x,y]$ anwenden. Dies zeigt, dass es ein $x_0 \in (x,y)$ so gibt, dass $\frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} = \exp'(x_0) = \exp(x_0)$ ist. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, folgt $\exp(x) < \exp(x_0) < \exp(y)$, also $\exp(x) < \frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} < \exp(y)$.

Aufgabe 9

Wir untersuchen die Funktionen zunächst auf Stetigkeit in 0.

Sei (x_n) eine beliebige Nullfolge. Dann ist (x_n^k) für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge. Sei $b_n = \sin(\frac{1}{x_n})$, falls $x_n \neq 0$ ist, und $b_n = 0$, falls $x_n = 0$ ist. Dann ist (b_n) beschränkt, und damit ist $(x_n^k b_n)$ eine Nullfolge. Es ist aber $x_n^k b_n = f(x_n)$, und es folgt, dass der Grenzwert von $(f(x_n))$ existiert, gleich 0 und damit gleich $f(0)$ ist. Somit ist f für alle $k \in \mathbb{N}$ stetig in $x = 0$.

Wir untersuchen die Funktionen jetzt auf Differenzierbarkeit in 0.

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R} \setminus 0$, die gegen 0 konvergiert. Es ist

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{x_n^k \sin(\frac{1}{x_n})}{x_n} = x_n^{k-1} \sin(\frac{1}{x_n}).$$

Wie im ersten Teil der Aufgabe ist $(x_n^{k-1} \sin(\frac{1}{x_n}))$ für $k > 1$ konvergent, und es folgt die Differenzierbarkeit der Funktionen in 0 für $k > 1$. Ist $k = 1$, so ist die Funktion in 0 nicht differenzierbar. Sei etwa $x_n = \frac{2}{n\pi}$. Dann ist (x_n) eine Nullfolge, aber die Folge $(\sin(\frac{1}{x_n}))$ ist nicht konvergent, da sie unendlich oft die Werte -1, 0 und 1 annimmt. Somit existiert der Grenzwert der Folge $(\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0})$ für $k = 1$ nicht.

Aufgabe 10

1. Seien $\alpha = (A \vee B) \to A$ und $\beta = B \to (A \wedge B)$. Eine Wahrheitstafel für α und β kann dann so aussehen:

A	B	$A \vee B$	α	$A \wedge B$	β
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

   Die vierte und sechste Spalte der Wahrheitstafel zeigen, dass α und β äquivalent sind.

2. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & (A \vee B) \to A & \\ & \approx & \neg(A \vee B) \vee A & \text{Junktor-Minimierung} \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee A & \text{De Morgan} \\ & \approx & (\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A) & \text{Distributivgesetze} \\ & \approx & (\neg B \vee A) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } \alpha \wedge 1 \approx \alpha \end{array}$$

   und

$$\begin{array}{rcll} \beta & = & B \to (A \wedge B) & \\ & \approx & \neg B \vee (A \wedge B) & \text{Junktor-Minimierung} \\ & \approx & (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee B) & \text{Distributivgesetze} \\ & \approx & (\neg B \vee A) & \neg B \vee B \approx 1 \text{ und } \alpha \wedge 1 \approx \alpha \end{array}$$

   Dies zeigt, dass α und β äquivalent sind.