Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2012

Klausur am 22.09.2012:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} k^2 = n(2n-1)$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $C[a, b]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ (Sie müssen nicht zeigen, dass dies ein Vektorraum ist). Zeigen Sie, dass

$$U = \{f \in C[a, b] \mid \int_a^b f(x)dx = 0\}$$

ein Unterraum von $C[a, b]$ ist.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig. Sei $v_3 \in V$ so, dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind. Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{K}$ mit

$$v_3 = av_1 + bv_2$$

gibt.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 5

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[T] \mid \text{Grad}(p) \leq 2\}$. Sei $f : V \longrightarrow M_{14}(\mathbb{R})$ mit $f(a_0+a_1T+a_2T^2) = (a_0, -a_1, a_2, a_0 + a_1 + a_2)$. Die Abbildung f ist linear, was Sie aber nicht beweisen müssen.

1. Berechnen Sie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und eine Basis von $\text{Bild}(f)$.
2. Berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ mit $\mathcal{B} = (1, T, T^2)$ und
$$\mathcal{C} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

[*6 + 4 = 10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 > 0$. Für alle $n \geq 1$ sei $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0$.

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergent ist.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 7

1. Begründen Sie, warum Sie beim Beweis, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+(-1)^n}{n^2}$ konvergent ist, das Leibnizkriterium NICHT anwenden können.
2. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+(-1)^n}{n^2}$ konvergent ist (z.B indem Sie sie als Summe konvergenter Reihen schreiben).

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Aufgabe 8

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

Beweisen Sie, dass $\exp(x)(y - x) < \exp(y) - \exp(x) < \exp(y)(y - x)$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9

Untersuchen Sie, für welche $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ stetig beziehungsweise differenzierbar ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass die Formeln $(A \vee B) \to A$ und $B \to (A \wedge B)$ äquivalent sind, indem Sie

1. eine Wahrheitstafel für beide Formeln aufstellen.
2. durch Äquivalenzumformungen zeigen, dass die Formeln äquivalent sind. Geben Sie dabei die vorgenommenen Äquivalenzumformungen mit an.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)} a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$