Klausur am 23.03.2013:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 .$$

[8 Punkte]

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} .$$

[12 Punkte]

Aufgabe 3

Seien V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und f, g lineare Abbildungen von V nach W. Gilt dann stets

1. $\text{Bild}(f+g) \subset \text{Bild}(f) + \text{Bild}(g)$?
2. $\text{Bild}(f) \cup \text{Bild}(g) \subset \text{Bild}(f+g)$?

[4 + 6 = 10 Punkte]

Aufgabe 4

1. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$ eine Nullfolge ist.

2. Ist die Folge

$$(b_n) = \left(\frac{n! + n}{2(n!) + 2^n} \right)$$

konvergent? Wenn ja, wogegen? (Aufgabenteil 1. darf verwendet werden.)

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie: Wenn für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a > 0 ,$$

dann hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{a}$. Hinweis: Quotientenkriterium für „gewöhnliche“ Reihen.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \sqrt{x} \ln(x) \, dx .$$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \vee B) \to (C \vee \neg B) .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$