Mathematische Grundlagen (01141) WS 2010/11

Klausur am 26.03.2011:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 2$. Dann gilt $2^2 = 4$ und $2 + 1 = 3$, also $2^2 > 2 + 1$, der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 2$ gilt $n^2 > n + 1$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$n^2 > n + 1 \Rightarrow (n + 1)^2 > n + 2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 > (n + 1) + 2n + 1 \text{ (Induktionsannahme)}\\ &\geq (n + 1) + 5, \text{ da } n \geq 2\\ &> n + 2.\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $n^2 > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt.

Aufgabe 2

Wir schreiben A und die 3×3-Einheitsmatrix in eine Matrix und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt überführen wir diese Matrix in Treppennormalform. Dazu subtrahieren wir das a-Fache der zweiten Zeile von der ersten und addieren das c-Fache der dritten Zeile zur zweiten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b-ac & | & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir das $(b - ac)$-Fache der dritten Zeile zur ersten und multiplizieren dass die dritte Zeile mit -1. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -a & b-ac \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rechts des Striches steht die zu A inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & b-ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

1. Wir verwenden zum Beweis das Unterraumkriterium. Die $n \times n$-Nullmatrix liegt in V_n, denn die Summe der Diagonaleinträge ist 0. Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ in

V_n. Dann gilt $\text{Spur}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \text{Spur}(A)+\text{Spur}(B) = 0+0 = 0$, also gilt $A+B \in V_n$. Sei $a \in \mathbb{K}$ und $A = (a_{ij}) \in V_n$. Dann gilt $\text{Spur}(aA) = \sum_{i=1}^{n} aa_{ii} = a\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a\text{Spur}(A) = a \cdot 0 = 0$. Es folgt $aA \in V_n$. Mit dem Unterraumkriterium ist V_n ein Unterraum von $\text{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

2. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Matrizen A, B und C liegen in V_2. Wir zeigen, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit

$$aA + bB + cC = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $a = b = c = 0$, und somit sind A, B und C linear unabhängig.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V_2$. Dann gilt $\text{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} = 0$, also $a_{22} = -a_{11}$. Es folgt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}C + a_{12}A + a_{21}B.$$

Somit ist (A, B, C) auch ein Erzeugendensystem von V_2, und es folgt, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist.

Aufgabe 4

1. Seien $v, w \in V$. Dann gilt $f_{a_0}(v+w) = a_0(v+w) = a_0v + a_0w = f_{a_0}(v) + f_{a_0}(w)$. Sei $v \in V$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $f_{a_0}(av) = a_0av = aa_0v = af_{a_0}(v)$. Es folgt, dass f_{a_0} linear ist.

2. Ist $a_0 \neq 0$, so ist a_0 invertierbar, und es ist auch f_{a_0} invertierbar, denn $f_{a_0^{-1}}$ ist die zu f_{a_0} inverse Abbildung. Damit ist f_{a_0} ein Isomorphismus. Da ein Isomorphismus Basen auf Basen abbildet, gilt $\dim(\text{Bild}(f_{a_0})) = \dim(V)$. Es folgt $\dim(\text{Kern}(f_{a_0})) = 0$. Ist $a_0 = 0$, so ist f_{a_0} die Nullabbildung, also $V = \text{Kern}(f_{a_0})$.
   Dann ist $\dim(\text{Kern}(f_{a_0})) = \dim(V)$ und $\dim(\text{Bild}(f_{a_0})) = 0$.

Aufgabe 5

Es sind $\lim\limits_{x\to 3}(x^3 - 27) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 0$, denn die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 27$ und $g(x) = x - 3$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und als Polynomfunktionen differenzierbar mit stetiger Ableitung. Es sind $\lim\limits_{x\to 3} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3} 3x^2 = 27$ und $\lim\limits_{x\to 3} g'(x) = \lim\limits_{x\to 3} 1 = 1$. Somit existiert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und ist 27. Es folgt $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27$ mit der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 6

Für alle $x \in (0,1)$ ist $x(1-x) > 0$, also $\sqrt{x(1-x)} > 0$. Ferner sind $f(0) = 0 = f(1)$. Somit liegen für $x = 0$ und $x = 1$ Minima vor. Wir untersuchen die Funktion jetzt auf dem offenen Intervall $(0,1)$ auf Extrema. Die Funktion f ist differenzierbar und wir bilden mit der Kettenregel die erste Ableitung von f. Es ist

$$f'(x) = (1-2x)\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Ein Extremum kann nur dann in $x_0 \in (0,1)$ vorliegen, wenn $f'(x_0) = 0$ ist. Wir untersuchen also die Funktion auf Nullstellen in $(0,1)$. Es ist

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x_0}{2\sqrt{x_0 - x_0^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Im Prinzip sind wir jetzt schon fertig. Die Funktion f ist auf $[0,1]$ stetig, es gilt $f(x) = 0$ für $x = 0$ beziehungsweise $x = 1$, und es ist $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,1)$. Dann kann f nicht monoton wachsend sein, muss also ein Maximum auf $(0,1)$ besitzen. Dies kann nur für $x = \frac{1}{2}$ vorliegen, denn $x = \frac{1}{2}$ ist die einzige Nullstelle von f'.

Wir können aber auch die zweite Ableitung betrachten. Wir stellen fest, dass f' differenzierbar ist und berechnen f'' mit der Quotientenregel:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - \frac{(1-2x)^2}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2}.$$

In die zweite Ableitung setzen wir jetzt $x_0 = \frac{1}{2}$ ein und erhalten

$$f''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} < 0.$$

Es folgt, dass in $x_0 = \frac{1}{2}$ ein Maximum von f vorliegt.

Aufgabe 7

Wir betrachten zunächst die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ist im Wesentlichen eine geometrische Reihe; nur, dass hier die Summation bei 1 und nicht bei 0 beginnt. Es ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}) - (\frac{1}{3})^0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Jetzt untersuchen wir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

und mit dieser Gleichung lässt sich die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe leicht berechnen. Es gilt nämlich

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

denn der negative Term in der Klammer hebt sich durch den positiven Term in der folgenden Klammer weg, und es überleben nur der erste und der letzte Term. Die Folge $(s_n) = (1 - \frac{1}{n+1})$ ist konvergent, und es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}(s_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1.$$

Somit gilt

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)}).$$

Aufgabe 8

Wir zeigen, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ konvergiert und verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Dazu müssen wir den $(n+1)$-ten Summanden $a_{n+1} = \frac{n+1}{17^{n+1}}$ durch den n-ten Summanden $a_n = \frac{n}{17^n}$ teilen. Wir erhalten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{17^{n+1}}}{\frac{n}{17^n}}\right| = \frac{n+1}{17^{n+1}} \cdot \frac{17^n}{n} = \frac{n+1}{17n}.$$

Die Folge $(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|) = (\frac{n+1}{17n})$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{17n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{n}}{17}) = \frac{1}{17} < 1.$$

Da der Grenzwert kleiner als 1 ist, folgt, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 9

Die gegebene Formel wird mittels Äquivalenzumformungen in eine Negations- und diese dann in eine disjunktive Normalform mit möglichst wenig Konjunktionen überführt; hierzu werden auch die vereinbarten Äquivalenzen $\alpha \vee \neg\alpha \approx \mathbf{1}$ (V1) und $\beta \wedge \mathbf{1} \approx \beta$ (V2) für Formeln

α und β verwendet (siehe Vereinbarung 20.1.29 in der Kurseinheit 7):

	$\neg(A \vee \neg C \rightarrow \neg B) \vee (C \wedge B \rightarrow D)$	Implikationen ersetzen
$\approx$	$\neg(\neg(A \vee \neg C) \vee \neg B) \vee (\neg(C \wedge B) \vee D)$	De Morgan
$\approx$	$(\neg\neg(A \vee \neg C) \wedge \neg\neg B) \vee (\neg(C \wedge B) \vee D)$	Doppelte Negationen
$\approx$	$((A \vee \neg C) \wedge B) \vee (\neg(C \wedge B) \vee D)$	De Morgan
$\approx$	$((A \vee \neg C) \wedge B) \vee ((\neg C \vee \neg B) \vee D)$	**Negationsnormalform**, Distributivgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B) \vee ((\neg C \vee \neg B) \vee D)$	Klammern
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B) \vee \neg C \vee \neg B \vee D$	**Disjunktive Normalform**, Kommutativgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B) \vee \neg B \vee \neg C \vee D$	Distributivgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee [(\neg C \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B)] \vee \neg C \vee D$	(V1)
$\approx$	$(A \wedge B) \vee [(\neg C \vee \neg B) \wedge \mathbf{1}] \vee \neg C \vee D$	(V2)
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \vee \neg B) \vee \neg C \vee D$	Kommutativgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee (\neg B \vee \neg C) \vee \neg C \vee D$	Assoziativgesetz
$\approx$	$(A \wedge B) \vee \neg B \vee (\neg C \vee \neg C) \vee D$	Idempotenzregel
$\approx$	$(A \wedge B) \vee \neg B \vee \neg C \vee D$	Distributivgesetz
$\approx$	$[(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B)] \vee \neg C \vee D$	(V1)
$\approx$	$[(A \vee \neg B) \wedge \mathbf{1}] \vee \neg C \vee D$	(V2)
$\approx$	$(A \vee \neg B) \vee \neg C \vee D$	Klammern
$\approx$	$A \vee \neg B \vee \neg C \vee D$	**Disjunktive Normalform ohne Konjunktion**