Mathematische Grundlagen (01141) WS 2010/11

Klausur am 26.03.2011:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $n^2 > n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die zu A inverse Matrix.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für alle $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sei $\mathrm{Spur}(A)$ definiert durch $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, also die Summe der Diagonalelemente von A.

1. Beweisen Sie, dass $V_n = \{A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $V_2 = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$.

[*4 + 8 = 12 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $a_0 \in \mathbb{K}$ fest gewählt. Sei $f_{a_0} : V \to V$ definiert durch $f_{a_0}(v) = a_0 v$ für alle $v \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f_{a_0} linear ist.
2. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Kern}(f_{a_0})$ und von $\mathrm{Bild}(f_{a_0})$.

[*2 + 8 = 10 Punkte*]

Aufgabe 5

Begründen Sie, warum Sie bei der Berechnung des folgenden Grenzwertes die Regel von de l'Hospital anwenden dürfen, und berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

[*4 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ für alle $x \in [0,1]$. Bestimmen Sie alle $x \in [0,1]$, bei denen Minima oder Maxima vorliegen.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)})$.

Hinweis: Möglicherweise ist folgende Gleichung hilfreich: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 8

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ konvergiert.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 9

Seien A, B, C, D Atome. Überführen Sie

$$\neg(A \vee \neg C \to \neg B) \vee (C \wedge B \to D)$$

schrittweise in eine Negations- und diese dann in eine disjunktive Normalform mit möglichst wenig Konjunktionen.

Erläutern Sie stichwortartig die jeweils vorgenommenen Äquivalenzumformungen, und benennen Sie Ihre Ergebnisse.

[*12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$