Klausur am 13.02.2010:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Sei $n_0 = 1$. Dann gilt $\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Für ein $n \geq 1$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

Wir schreiben A und die Einheitsmatrix I_3 durch einen Strich getrennt in eine Matrix und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun überführen wir diese Matrix in Treppennormalform. Dazu addieren wir die erste Zeile zur zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt tauschen wir die zweite und die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt subtrahieren wir die zweite von der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Wir teilen die dritte Zeile durch 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Zum Schluss subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Rechts des Striches steht die zu A inverse Matrix, also $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

1. Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b'+c+c' & d+d' \\ b+b' & a+a'+d+d' & a+a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b'+c' & d' \\ b' & a'+d' & a' \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b+\lambda c & \lambda d \\ \lambda b & \lambda a+\lambda d & \lambda a \end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass f linear ist.

2. Wir setzen die Standardbasisvektoren von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ in f ein und erhalten

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} &= A_1\\
f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} &= A_2\\
f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} &= A_3\\
f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} &= A_4.
\end{aligned}$$

Diese Matrizen bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Dazu seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a&b+c&d\\b&a+d&a\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es folgt $a = d = b = 0$, also $c = 0$. Die Matrizen sind also linear unabhängig und bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Somit sind sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

3. Es ist $\dim(\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})) = 4 = \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 0,$$

also $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. Da f linear ist, folgt, dass f injektiv ist.

Natürlich kann man die Injektivität von f auch direkt nachrechnen.

Aufgabe 4

Es gilt $f(0) = |-1| > 0$ und $f(4) = 3 + 12 - 16 = -1 < 0$.

Als Summe und Verknüpfung stetiger Funktionen ist f stetig. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f in $[0, 4]$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 5

Seien $f(x) = \exp(x) - 1 - x$ und $g(x) = \sin^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Funktionen f und g sind auf einer Umgebung U von 0 definiert und stetig; somit gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2(x) = 0$. Die Funktionen f und g sind differenzierbar mit $f'(x) = \exp(x) - 1$ und $g'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Weiter sind f' und g' auf U definiert und stetig, und es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$. Ferner sind f' und g' differenzierbar mit $f''(x) = \exp(x)$ und $g''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$. Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2$ (aufgrund der Stetigkeit von f'' und g''). Damit existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1-x}{\sin^2(x)}.$$

Aufgabe 6

1. Wir verwenden zur Berechnung den Satz von Cauchy-Hadamard. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ existiert. Es ist $\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}$. Die Folge $(\sqrt[n]{n})$ konvergiert laut Studienbrief gegen 1, und da die Wurzelfunktion stetig ist, konvergiert $(\sqrt{\sqrt[n]{n}})$ gegen $\sqrt{1} = 1$. Es folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ ist. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 1, also das Konvergenzintervall $(-1, 1)$ ist.

2. Für $x = 1$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Für alle $n \geq 1$ ist $\sqrt{n} \leq n$, also $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent ist, denn die Folgen beider Partialsummen sind unbeschränkt. Somit folgt, dass die Potenzreihe für $x = 1$ divergent ist.

   Für $x = -1$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Da $(\sqrt{n})$ monoton wachsend und unbeschränkt ist, ist $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine monoton fallende Nullfolge. Es folgt mit dem Leibniz-Kriterium, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent ist. Somit ist die Potenzreihe für $x = -1$ konvergent.

Aufgabe 7

Gegeben sind Atome A, B, C, D. Als Prämissen sind

1. $A \to C \vee \neg D$
2. $B \vee C \to D$
3. $A \wedge B$

gegeben, aus denen mittels eines formalen Beweises nachgewiesen wird, dass dann C gilt:

1.	$A \to C \vee \neg D$	Prämisse
2.	$B \vee C \to D$	Prämisse
3.	$A \wedge B$	Prämisse
4.	B	3., Vereinfachung
5.	$B \vee C$	4., Ausdehnung
6.	D	5., 2., Modus ponens
7.	A	3., Vereinfachung
8.	$C \vee \neg D$	7., 1., Modus ponens
9.	$\neg D \vee C$	8., Kommutativgesetz
10.	$D \to C$	9., Implikation
11.	C	6., 10., Modus ponens

Damit ist gezeigt, dass unter den genannten Prämissen die Aussage C gilt.

Aufgabe 8

1. Da $a_n > \sqrt{x_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge (a_n) nach unten beschränkt. Es gilt $1 + a_n > 0$ sowie $a_n^2 > x_0$, also $-a_n^2 < -x_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist damit

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \tfrac{x_0+a_n}{1+a_n} - a_n = \tfrac{x_0+a_n}{(1+a_n)} - \tfrac{(1+a_n)a_n}{(1+a_n)} \\ &= \tfrac{x_0+a_n-a_n-a_n^2}{1+a_n} = \tfrac{x_0-a_n^2}{1+a_n} < \tfrac{x_0-x_0}{1+a_n} = 0. \end{aligned}$$

Es folgt $a_{n+1} < a_n$. Damit ist die Folge streng monoton fallend, also auch nach oben beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip ist die Folge konvergent.

2. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Da $a_n > \sqrt{x_0} > 0$ ist, folgt $a \geq \sqrt{x_0} > 0$. Mit der unter 1. gezeigten Konvergenz folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_0 + \lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{x_0 + a}{1 + a},$$

also $a = \frac{x_0+a}{1+a}$, somit $a + a^2 = x_0 + a$, und damit $a^2 = x_0$. Es folgt $a = \sqrt{x_0}$, denn $a > 0$.