FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2009/10

DATUM: 13.02.2010
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	8	16	4	8	14	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) — WS 2009/10

Klausur am 13.02.2010:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c & d \\ b & a+d & a \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
3. Beweisen Sie, dass f injektiv ist.

[*4 + 8 + 4 = 16 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto |x - 1| + 3x - x^2$.

Beweisen Sie, dass f in $[0, 4]$ eine Nullstelle besitzt.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5

Begründen Sie, warum Sie bei der Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{\sin^2(x)}$$

die Regel von de l'Hospital verwenden dürfen, und berechnen Sie diesen Grenzwert.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

1. Beweisen Sie, dass $(-1, 1)$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ist.
2. Untersuchen Sie, ob diese Potenzreihe in den Punkten $x = 1$ beziehungsweise $x = -1$ konvergent ist.

[*6 + 8 = 14 Punkte*]

Aufgabe 7

Seien A, B, C, D Atome für die folgende Aussagen gelten:

1. $A \to C \vee \neg D$
2. $B \vee C \to D$
3. $A \wedge B$

Weisen Sie mit einem formalen Beweises nach, dass dann auch C gilt. Erläutern Sie stichwortartig die einzelnen Beweisschritte.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Sei $x_0 \in (0, 1)$ fest gewählt. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{x_0 + a_n}{1 + a_n}$.

Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass $a_n > \sqrt{x_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Monotonieprinzips, dass (a_n) konvergent ist.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$