Mathematische Grundlagen (1141) **WS 07/08**

Klausur am 09.02.2008:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen der folgenden Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $V = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $f : V \to V$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von Bild(f) und von Kern(f).

[*4 + 12 = 16 Punkte*]

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Formel mit vollständiger Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

[10 Punkte]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt $(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n) = n$.

[8 Punkte]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergent ist.

[8 Punkte]

Aufgabe 7

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für alle $x \in I \cap \mathbb{Q}$ sei $f(x) = g(x)$.

Beweisen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

[10 Punkte]

Aufgabe 8

Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = \sqrt{\sin(\frac{\cos(x)}{x})}$ definiert ist. Berechnen Sie $f'(x)$.

[8 Punkte]

Aufgabe 9

1. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ wahr ist.
2. Konstruieren Sie eine Interpretation, sodass die Formel $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ falsch ist.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$