Beachten Sie bitte die Hinweise auf dem Deckblatt!

Aufgabe 1 [illegible]

2 Punkte (a) Seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $M \subset X$.

Definieren Sie die Begriffe

- Umgebung von a.
- innerer Punkt von M.

10 Punkte (b) Bestimmen Sie (mit Beweis) die Menge $\mathring{M}$ aller inneren Punkte der Menge

$$M := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Aufgabe 2

[illegible] Punkte (a) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie die Definition der Stetigkeit von f im Punkt a sowie das Folgenkriterium dafür. ($\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}$ seien mit einer Norm versehen.)

(b) Sei $a = \binom{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}^2$, und sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{|y|}}, & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

$\frac{x+y}{\sqrt{|y|}}$

definiert. Zeigen Sie, dass

[illegible] Punkte (i) f stetig ist in a, wenn $a_2 \neq 0$ gilt,

[illegible] Punkte (ii) f nicht stetig ist in a, wenn $a_2 = 0$ gilt.

[illegible] Punkte **Aufgabe 3**

Beweisen Sie die folgende Aussage aus dem Kurs:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und a ein innerer Punkt von M. Ist $f \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}^m)$ differenzierbar in a, so ist f auch stetig in a.

[illegible] Punkte **Aufgabe 4**

Bestimmen Sie die Stellen $\binom{x}{y}$, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ \binom{x}{y} \longmapsto f(x, y) := x^3 - 3x^2 + 4x - 2 - 4xy - 4y - 2y^2$$

lokale Maxima, lokale Minima bzw. Sattelpunkte hat.

Aufgabe 5

1 Punkt (a) Seien $I := [\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall mit $\alpha \le \beta$ und $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$. Für eine Intervallteilung $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ von I mit $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha = t_0 \le \dots \le t_m = \beta$ sei

$$L(\varphi, T) := \sum_{\mu=1}^{m} \|\varphi(t_\mu) - \varphi(t_{\mu-1})\|_2 .$$

Wie ist die totale Variation von φ (bez. $\|\ \|_2$) definiert?

7 Punkte (b) Bestimmen Sie (bez. $\|\ \|_2$) die Länge der Kurve $[\varphi]$ mit

$$\varphi : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longrightarrow \varphi(t) := \begin{pmatrix} \cancel{t^3 \cos t} \\ \cancel{t^2} \sin t \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \end{matrix} \quad *$$

Hinweis: Die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve kann oft unter geeigneten Voraussetzungen mithilfe eines Integrals bestimmt werden.

Aufgabe 6

Sei $V := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \text{ und } 0 \le xy \le 1\}$, und $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) := \frac{1}{xy+1}$ definiert.

4 Punkte (a) Berechnen Sie $\int_V f \, d\lambda_2$ durch direkte Anwendung des Satzes von Fubini. Dabei können Sie ohne Beweis benutzen, dass $f \in \mathcal{L}(V)$ gilt.

4 Punkte (b) Begründen Sie, dass

$$T : \left\{\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u > 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \binom{u}{v} \longrightarrow T(u, v) := \binom{u}{\frac{v}{u}}$$

injektiv und stetig differenzierbar ist, und berechnen Sie $\det T'(u, v)$ für $u > 0$

6 Punkte (c) Beweisen Sie für $U := [1, 2] \times [0, 1]$ die Beziehung $T(U) = V$, und berechnen Sie $\int_V f \, d\lambda_2 = \int_{T(U)} f \, d\lambda_2$, indem Sie zunächst den Transformationssatz und dann den Satz von Fubini anwenden.

memento: $\cos^2 + \sin^2 = 1$

$$* \quad \varphi' = \begin{matrix} 3t^2 \cos t - t^3 \sin t \\ 2t \sin t + t^2 \cos t \end{matrix}$$

$$\|\varphi'\|_2 = \sqrt{9t^4 \cos t + t^6 \sin t - 6t^5 \cos t \sin t + 4t^2 \sin^2 t + t^4 \cos^2 t + 4t^3 \sin t \cos t}$$

$$= t \sqrt{10t^2 \cos^2 t + (4 + t^4) \sin^2 t} \dots$$

Klausur am 02.08.2008

Lösungsvorschläge zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1 normiert

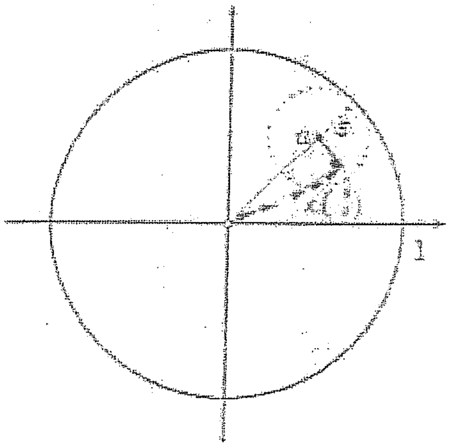
(a) Seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $M \subset X$.
$U \subset X$ heißt Umgebung von a, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass die ε- Umgebung von a, also $U_\varepsilon(a) := \{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\}$, in U enthalten ist. Weiter heißt a innerer Punkt von M, wenn M Umgebung von a ist.

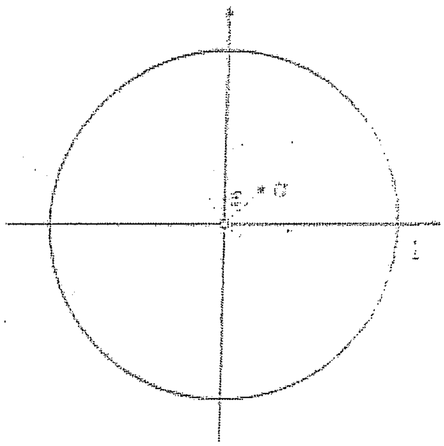
(b) Wir zeigen für $M := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$, dass für die Menge $\overset{\circ}{M}$ der inneren Punkte von M die Beziehung

$$\overset{\circ}{M} = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x^2 + y^2 < 1\right\}$$

gilt.

(i) Sei $a = \binom{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < \alpha^2 + \beta^2 < 1$ gegeben. Wir zeigen, dass a innerer Punkt von M ist. Dazu setzen wir $\varepsilon := \min\{d_2(a, \binom{0}{0}), 1 - d_2(a, \binom{0}{0})\}$ (vgl. Skizze).





Fall: a liegt näher an der Kreislinie als bei 0, also $\varepsilon = 1 - d_2(a, \binom{0}{0})$

Fall: a liegt näher bei 0 als an der Kreislinie, also $\varepsilon = d_2(a, \binom{0}{0})$

Dann ist $\varepsilon > 0$, und es gilt $U_\varepsilon(a) \subset M$, denn für $x = \binom{\xi}{\eta} \in U_\varepsilon(a)$ ist nach der Dreiecksungleichung

$$d_2(x, \tbinom{0}{0}) \leq d_2(x, a) + d_2(a, \tbinom{0}{0}) < \varepsilon + d_2(a, \tbinom{0}{0}) \leq 1 - d_2(a, \tbinom{0}{0}) + d_2(a, \tbinom{0}{0}) = 1,$$

also $d_2(x, \binom{0}{0}) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < 1$ und folglich $\xi^2 + \eta^2 < 1$, und außerdem ist nach der Dreiecksungleichung

$$d_2\left(a, \binom{0}{0}\right) \leq d_2(a, x) + d_2\left(x, \binom{0}{0}\right) < \varepsilon + d_2\left(x, \binom{0}{0}\right) \leq d_2\left(a, \binom{0}{0}\right) + d_2\left(x, \binom{0}{0}\right)$$

was $0 < d_2\left(x, \binom{0}{0}\right) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ zur Folge hat. Insgesamt gilt also $0 < \xi^2 - \eta^2 < 1$ für $x \in U_\varepsilon(a)$, d. h. $U_\varepsilon(a) \subset M$. Damit ist a als innerer Punkt von M nachgewiesen.

(ii) Ist a innerer Punkt von M, so ist M Umgebung von M und muss damit a enthalten. Es folgt, dass Punkte, die nicht zu M gehören, keine inneren Punkte von M sein können. Folglich ist $a = \binom{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha = \beta = 0$ bzw. mit $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ kein innerer Punkt von M.

(iii) Auch die Punkte $a = \binom{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ sind keine inneren Punkte: Sei ein solcher Punkt a vorgelegt. Wir zeigen, dass jede Umgebung U von a einen Punkt enthält, der nicht zu M gehört, und folglich $U \not\subset M$ gilt. Sei dazu U eine Umgebung von a, und sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_\varepsilon(a) \subset U$ gilt. Dann betrachten wir $x = \binom{\xi}{\eta} := (1 + \frac{\varepsilon}{2})a$.
Hierfür gilt $\xi^2 + \eta^2 = (1 + \frac{\varepsilon}{2})^2(\alpha^2 + \beta^2) = (1 + \frac{\varepsilon}{2})^2 > 1$, also $x \notin M$. Außerdem gilt $x \in U_\varepsilon(a)$, also $x \in U$, da $d_2(x, a) = \|x - a\|_2 = \|(1 + \frac{\varepsilon}{2})a - a\|_2 = \|\frac{\varepsilon}{2}a\|_2 = \frac{\varepsilon}{2}\|a\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ist.

Aufgabe 2

(a) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt stetig in a, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a derart gibt, sodass $f(U \cap D) \subset V$ gilt.
f ist genau dann in a stetig, wenn für jede Folge (x_k) in D mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$ die Beziehung $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$ gilt.

(b) Sei $a = \binom{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}^2$, und sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x + y}{\sqrt{|y|}}, & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

definiert.

(i) Es sei $M := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Wir zeigen, dass f in allen $a \in M$ stetig ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass die Einschränkung von f auf M, also die Funktion $f|_M$, stetig ist. Die Projektionen

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ \binom{x}{y} \longrightarrow \pi_1(x, y) := x \quad \text{und} \quad \pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ \binom{x}{y} \longrightarrow \pi_2(x, y) := y$$

und damit die Einschränkungen $\pi_1|_M$ und $\pi_2|_M$ sind stetig. Da die Betragsfunktion $|\ |$ und die Wurzelfunktion $\sqrt{\ }$ stetig sind, ist auch die Hintereinanderschaltung $\sqrt{\ } \circ |\ | \circ \pi_2|_M$ stetig. Aufgrund der Rechenregeln für stetige Funktionen ist dann

$$f|_M = \frac{\pi_1|_M + \pi_2|_M}{\sqrt{\ } \circ |\ | \circ \pi_2|_M}$$